§ 49. Адиабатические инварианты

Рассмотрим механическую систему, совершающую одномерное финитное движение и характеризующуюся некоторым параметром λ, определяющим свойства самой системы или внешнего поля, в котором она находится [1]).

Предположим, что параметр λ под влиянием каких-либо внешних причин медленно (как говорят, *адиабатически*) меняется со временем. Под медленным подразумевается такое изменение, при котором λ мало меняется за время периода движения системы T:

$$T\frac{d\lambda}{dt} \ll \lambda. \tag{49,1}$$

При постоянном λ система была бы замкнутой и совершала бы строго периодическое движение с постоянной энергией E и вполне определенным периодом $T(E)$. При переменном параметре λ система не является замкнутой и ее энергия не сохраняется. Но в силу предположенной медленности изменения λ скорость $\dot{E}$ изменения энергии будет тоже малой. Если усреднить эту скорость по периоду T и тем самым сгладить «быстрые» колебания в ее величине, то получающееся таким образом значение $\overline{\dot{E}}$ определит скорость систематического медленного изменения энергии системы; об этой скорости можно утверждать, что она будет пропорциональна скорости $\dot{\lambda}$ изменения параметра λ. Это значит, другими словами, что понимаемая в указанном смысле медленно меняющаяся величина E будет вести себя как некоторая функция от λ. Зависимость E от λ можно представить в виде постоянства некоторой комбинации из E и λ. Такую величину, остающуюся постоянной при движении системы с медленно меняющимися параметрами, называют *адиабатическим инвариантом.*

Пусть $H(q, p; \lambda)$ — гамильтонова функция системы, зависящая от параметра λ. Согласно (40,5) скорость изменения энергии системы

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{dt}. \tag{49,2}$$

Выражение в правой стороне этой формулы зависит не только от медленно меняющейся переменной λ, но и от быстро меняющихся переменных q и p. Для выделения интересующего нас систематического хода изменения энергии надо, согласно сказанному выше, усреднить равенство (49,2) по периоду движения. При этом ввиду медленности изменения λ (а с ним и $\dot{\lambda}$)

[1]) Для краткости записи формул мы предполагаем, что имеется всего один такой параметр, но все результаты остаются в силе и при любом числе параметров.

можно вынести $\dot{\lambda}$ за знак усреднения:

$$\overline{\frac{dE}{dt}} = \frac{d\lambda}{dt}\overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}, \tag{49,3}$$

а в усредняемой функции $\partial H/\partial\lambda$ рассматривать как изменяющиеся величины лишь q и p, но не λ. Другими словами, усреднение производится по такому движению системы, какое имело бы место при заданном постоянном значении λ.

Запишем усреднение в явном виде как

$$\overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\partial H}{\partial \lambda}\,dt.$$

Согласно уравнению Гамильтона $\dot{q} = \partial H/\partial p$ имеем

$$dt = \frac{dq}{\partial H/\partial p}.$$

С помощью этого равенства заменяем интегрирование по времени на интегрирование по координате, причем и период T записываем в виде

$$T = \int_0^T dt = \oint \frac{dq}{\partial H/\partial p}; \tag{49,4}$$

знаком $\oint$ здесь обозначается интегрирование по полному изменению координаты («вперед» и «назад») за время периода [1]. Таким образом, формула (49,3) принимает вид

$$\overline{\frac{dE}{dt}} = \frac{d\lambda}{dt}\,\frac{\oint \frac{\partial H/\partial\lambda}{\partial H/\partial p}\,dq}{\oint \frac{dq}{\partial H/\partial p}}. \tag{49,5}$$

Как уже было указано, интегрирования в этой формуле должны производиться по траектории движения при данном постоянном значении λ. Вдоль такой траектории функция Гамильтона сохраняет постоянное значение E, а импульс является определенной функцией переменной координаты q и двух постоянных независимых параметров E и λ. Понимая импульс именно как такую функцию $p(q; E, \lambda)$ и дифференцируя равенство $H(p, q; \lambda) = E$ по параметру λ, получим:

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} + \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial \lambda} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial H/\partial\lambda}{\partial H/\partial p} = -\frac{\partial p}{\partial \lambda}.$$

---

[1]) Если движение системы представляет собой вращение, а координатой q является некоторый угол поворота φ, то интегрирование по $d\varphi$ должно производиться по «полному обороту», т. е. от нуля до 2π.

Подставив это в верхний интеграл в (49,5) и написав в нижнем подынтегральную функцию в виде $\partial p/\partial E$, имеем:

$$\overline{\frac{dE}{dt}} = -\frac{d\lambda}{dt}\frac{\oint \frac{\partial p}{\partial \lambda} dq}{\oint \frac{\partial p}{\partial E} dq} \quad \text{или} \quad \oint \left(\frac{\partial p}{\partial E}\overline{\frac{dE}{dt}} + \frac{\partial p}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{dt} \right) dq = 0.$$

Это равенство можно окончательно переписать в виде

$$\overline{\frac{dI}{dt}} = 0, \tag{49,6}$$

где I обозначает интеграл

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint p\,dq, \tag{49,7}$$

взятый по траектории движения при заданных E и λ. Этот результат показывает, что величина I остается в рассматриваемом приближении постоянной при изменении параметра λ, т. е. является адиабатическим инвариантом.

Величина I является функцией энергии системы (и параметра λ). Ее частная производная по энергии определяет период движения: согласно (49,4) имеем

$$2\pi \frac{\partial I}{\partial E} = \oint \frac{\partial p}{\partial E} dq = T \tag{49,8}$$

или иначе

$$\frac{\partial E}{\partial I} = \omega, \tag{49,9}$$

где $\omega = 2\pi T$ — частота колебаний системы.

Интегралу (49,7) может быть приписан наглядный геометрический смысл, если воспользоваться понятием о фазовой траектории системы. В данном случае (одна степень свободы) фазовое пространство сводится к двумерной системе координат p, q, и фазовая траектория системы, совершающей периодическое движение, представляет собой замкнутую кривую в этой плоскости. Интеграл (49,7), взятый вдоль этой кривой, представляет собой заключенную внутри нее площадь. Он может быть написан и как двумерный интеграл по площади:

$$I = \frac{1}{2\pi}\int dp\,dq. \tag{49,10}$$

В качестве примера определим адиабатический инвариант для одномерного осциллятора. Его функция Гамильтона

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}, \tag{49,11}$$

где ω — собственная частота осциллятора. Уравнение фазовой траектории дается законом сохранения энергии

$$H(p, q) = E.$$

Это есть эллипс с полуосями $\sqrt{2mE}$ и $\sqrt{2E/m\omega^2}$ и его площадь (деленная на 2π)

$$I = E/\omega. \tag{49,12}$$

Адиабатическая инвариантность этой величины означает, что при медленном изменении параметров осциллятора его энергия меняется пропорционально частоте.

§ 50. Канонические переменные

Пусть теперь параметр λ постоянен, так что рассматриваемая система замкнута.

Произведем каноническое преобразование переменных q, p, выбрав величину I в качестве нового «импульса». Роль производящей функции должно при этом играть «укороченное действие» S_0, выраженное в функции от q и I. Действительно, S_0 определяется как интеграл

$$S_0(q, E; \lambda) = \int p(q, E; \lambda)\, dq, \tag{50,1}$$

взятый при заданном значении энергии E (и параметра λ). Но для замкнутой системы I является функцией одной только энергии; поэтому S_0 можно с тем же правом выразить в виде функции $S_0(q, I; \lambda)$, а частная производная $(\partial S_0/\partial q)_E = p$ совпадает с производной $(\partial S_0/\partial q)_I$ при постоянном I. Поэтому имеем

$$p = \frac{\partial S_0(q, I; \lambda)}{\partial q}, \tag{50,2}$$

что соответствует первой из формул канонического преобразования (45,8). Вторая же формула определит новую «координату», которую обозначим через w:

$$w = \frac{\partial S_0(q, I; \lambda)}{\partial I}. \tag{50,3}$$

Переменные I и w называют *каноническими переменными*, причем I называется в этой связи *переменной действия*, а w — *угловой переменной*.

Поскольку производящая функция $S_0(q, I; \lambda)$ не зависит явно от времени, то новая функция Гамильтона H' совпадает со старой H, выраженной через новые переменные. Другими словами, H' есть энергия, выраженная в функции переменной