где ω — собственная частота осциллятора. Уравнение фазовой траектории дается законом сохранения энергии

$$H(p,\ q) = E.$$

Это есть эллипс с полуосями $\sqrt{2mE}$ и $\sqrt{2E/m\omega^2}$ и его площадь (деленная на 2π)

$$I = E/\omega. \tag{49,12}$$

Адиабатическая инвариантность этой величины означает, что при медленном изменении параметров осциллятора его энергия меняется пропорционально частоте.

§ 50. Канонические переменные

Пусть теперь параметр λ постоянен, так что рассматриваемая система замкнута.

Произведем каноническое преобразование переменных q, p, выбрав величину I в качестве нового «импульса». Роль производящей функции должно при этом играть «укороченное действие» S_0, выраженное в функции от q и I. Действительно, S_0 определяется как интеграл

$$S_0(q,\ E;\ \lambda) = \int p(q,\ E;\ \lambda)\, dq, \tag{50,1}$$

взятый при заданном значении энергии E (и параметра λ). Но для замкнутой системы I является функцией одной только энергии; поэтому S_0 можно с тем же правом выразить в виде функции $S_0(q, I; \lambda)$, а частная производная $(\partial S_0/\partial q)_E = p$ совпадает с производной $(\partial S_0/\partial q)_I$ при постоянном I. Поэтому имеем

$$p = \frac{\partial S_0(q,\ I;\ \lambda)}{\partial q}, \tag{50,2}$$

что соответствует первой из формул канонического преобразования (45,8). Вторая же формула определит новую «координату», которую обозначим через w:

$$w = \frac{\partial S_0(q,\ I;\ \lambda)}{\partial I}. \tag{50,3}$$

Переменные I и w называют *каноническими переменными*, причем I называется в этой связи *переменной действия*, а w — *угловой переменной*.

Поскольку производящая функция $S_0(q, I; \lambda)$ не зависит явно от времени, то новая функция Гамильтона H' совпадает со старой H, выраженной через новые переменные. Другими словами, H' есть энергия, выраженная в функции переменной действия, $E(I)$. Соответственно уравнения Гамильтона для кинетических переменных имеют вид

$$\dot{I}=0, \quad \dot{w}=\frac{dE(I)}{dI}. \tag{50,4}$$

Из первого имеем, как и следовало, $I=\text{const}$ — вместе с энергией постоянна и величина I. Из второго же видим, что угловая переменная является линейной функцией времени:

$$w=\frac{dE}{dI}t+\text{const}=\omega(I)\,t+\text{const}; \tag{50,5}$$

она представляет собой фазу колебаний.

Действие $S_0(q, I)$ — неоднозначная функция координат. По истечении каждого периода эта функция не возвращается к исходному значению, а получает приращение

$$\Delta S_0=2\pi I, \tag{50,6}$$

как это очевидно из (50,1) и определения I согласно (49,7). За это же время угловая переменная получает приращение

$$\Delta w=\Delta\frac{\partial S_0}{\partial I}=\frac{\partial}{\partial I}\Delta S_0=2\pi. \tag{50,7}$$

Обратно, если мы выразим q и p (или любую их однозначную функцию $F(q,p)$) через канонические переменные, то эти функции не будут менять свои значения при изменении w на 2π (при заданном значении I). Другими словами, всякая однозначная функция $F(q, p)$, будучи выражена через канонические переменные, является периодической функцией w с периодом, равным 2π.

Уравнения движения могут быть сформулированы в канонических переменных также и для незамкнутой системы с зависящим от времени параметром λ. Преобразование к этим переменным осуществляется по-прежнему формулами (50,2)—(50,3) с производящей функцией S_0, определяемой интегралом (50,1) и выраженной через переменную I, определяемую интегралом (49,7). Неопределенный интеграл (50,1) и определенный интеграл (49,7) вычисляются при этом так, как если бы параметр $\lambda(t)$ имел заданное постоянное значение; другими словами, $S_0(q, I; \lambda(t))$ — прежняя функция, вычисленная при постоянном λ, замененном затем заданной функцией $\lambda(t)$ [1]).

Поскольку производящая функция оказывается теперь (вместе с параметром λ) явной функцией времени, то новая функция Гамильтона H' уже не будет совпадать со старой, т. е.

---

[1]) Подчеркнем, однако, что определенная таким образом функция S_0 уже отнюдь не совпадает с истинным укороченным действием для системы с зависящей от времени гамильтоновой функцией!

с энергией $E(I)$. Согласно общим формулам канонического преобразования (45,8) имеем

$$H' = E(I;\ \lambda) + \frac{\partial S_0}{\partial t} = E(I;\ \lambda) + \Lambda\dot{\lambda}, \tag{50,8}$$

где введено обозначение

$$\Lambda = \left(\frac{\partial S_0}{\partial \lambda}\right)_{q,I}, \tag{50,9}$$

причем Λ должна быть выражена (после осуществления дифференцирования по λ) с помощью (50,3) через I и w.

Уравнения Гамильтона принимают теперь вид

$$\dot{I} = -\frac{\partial H'}{\partial w} = -\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial w}\right)_{I,\lambda}\dot{\lambda}, \tag{50,10}$$

$$\dot{w} = \frac{\partial H'}{\partial I} = \omega(I;\ \lambda) + \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial I}\right)_{w,\lambda}\dot{\lambda}, \tag{50,11}$$

где $\omega = (\partial E/\partial I)_\lambda$ — частота колебаний (снова вычисленная так, как если бы λ было постоянным).

Задача

Написать уравнения движения в канонических переменных для гармонического осциллятора (функция Гамильтона (49,11)) с частотой, зависящей от времени.

Решение. Поскольку в (50,1)—(50,3) все действия совершаются при постоянном λ (роль которого играет в данном случае сама частота ω), то связь q и p с w имеет тот же вид, что и при постоянной частоте (когда $w = \omega t$):

$$q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\sin w = \sqrt{\frac{2I}{m\omega}}\sin w, \qquad p = \sqrt{2I\omega m}\cos w.$$

Отсюда

$$S_0 = \int p\,dq = \int p\left(\frac{\partial q}{\partial w}\right)_{I,\omega} dw = 2I\int \cos^2 w\,dw$$

и затем

$$\Lambda = \left(\frac{\partial S_0}{\partial \omega}\right)_{q,I} = \left(\frac{\partial S_0}{\partial w}\right)_I\left(\frac{\partial w}{\partial \omega}\right)_q = \frac{I}{2\omega}\sin 2w.$$

Уравнения (50,10), (50,11) принимают теперь вид

$$\dot{I} = -I\frac{\dot{\omega}}{\omega}\cos 2w, \qquad \dot{w} = \omega + \frac{\dot{\omega}}{2\omega}\sin 2w.$$

§ 51. Точность сохранения адиабатического инварианта

Уравнение движения в форме (50,10) позволяет снова убедиться в адиабатической инвариантности переменной действия.

Функция $S_0(q, I;\ \lambda)$ — неоднозначная функция q; при возвращении координаты к первоначальному значению к S_0 прибавляется целое кратное от $2\pi I$. Производная же (50,9) — одно-