с энергией $E(I)$. Согласно общим формулам канонического преобразования (45,8) имеем

$$H' = E(I;\ \lambda) + \frac{\partial S_0}{\partial t} = E(I;\ \lambda) + \Lambda\dot{\lambda}, \tag{50,8}$$

где введено обозначение

$$\Lambda = \left(\frac{\partial S_0}{\partial \lambda}\right)_{q,I}, \tag{50,9}$$

причем Λ должна быть выражена (после осуществления дифференцирования по λ) с помощью (50,3) через I и w.

Уравнения Гамильтона принимают теперь вид

$$\dot{I} = -\frac{\partial H'}{\partial w} = -\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial w}\right)_{I,\lambda}\dot{\lambda}, \tag{50,10}$$

$$\dot{w} = \frac{\partial H'}{\partial I} = \omega(I;\ \lambda) + \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial I}\right)_{w,\lambda}\dot{\lambda}, \tag{50,11}$$

где $\omega = (\partial E/\partial I)_\lambda$ — частота колебаний (снова вычисленная так, как если бы λ было постоянным).

Задача

Написать уравнения движения в канонических переменных для гармонического осциллятора (функция Гамильтона (49,11)) с частотой, зависящей от времени.

Решение. Поскольку в (50,1)—(50,3) все действия совершаются при постоянном λ (роль которого играет в данном случае сама частота ω), то связь q и p с w имеет тот же вид, что и при постоянной частоте (когда $w = \omega t$):

$$q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\sin w = \sqrt{\frac{2I}{m\omega}}\sin w, \qquad p = \sqrt{2I\omega m}\cos w.$$

Отсюда

$$S_0 = \int p\,dq = \int p\left(\frac{\partial q}{\partial w}\right)_{I,\omega} dw = 2I\int \cos^2 w\,dw$$

и затем

$$\Lambda = \left(\frac{\partial S_0}{\partial \omega}\right)_{q,I} = \left(\frac{\partial S_0}{\partial w}\right)_I\left(\frac{\partial w}{\partial \omega}\right)_q = \frac{I}{2\omega}\sin 2w.$$

Уравнения (50,10), (50,11) принимают теперь вид

$$\dot{I} = -I\frac{\dot{\omega}}{\omega}\cos 2w, \qquad \dot{w} = \omega + \frac{\dot{\omega}}{2\omega}\sin 2w.$$

§ 51. Точность сохранения адиабатического инварианта

Уравнение движения в форме (50,10) позволяет снова убедиться в адиабатической инвариантности переменной действия.

Функция $S_0(q, I;\ \lambda)$ — неоднозначная функция q; при возвращении координаты к первоначальному значению к S_0 прибавляется целое кратное от $2\pi I$. Производная же (50,9) — однозначная функция, так как дифференцирование производится при постоянном I и прибавляющиеся к S_0 приращения при этом исчезают. Как и всякая однозначная функция, функция Λ, будучи выражена через угловую переменную w, будет периодической функцией этой переменной. Среднее же (по периоду) значение производной $\partial\Lambda/\partial w$ от периодической функции обращается в нуль. Поэтому, усредняя уравнение (50,10) и вынося при этом $\dot{\lambda}$ (при медленном изменении λ) из-под знака среднего, получим

$$\overline{\dot{I}} = -\overline{\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial w}\right)_I}\,\dot{\lambda} = 0, \tag{51,1}$$

что и требовалось.

Уравнения движения (50,10), (50,11) позволяют рассмотреть и вопрос о точности, с которой сохраняется адиабатический инвариант. Поставим этот вопрос следующим образом: пусть параметр $\lambda(t)$ стремится при $t\to-\infty$ и $t\to+\infty$ к постоянным пределам λ_- и λ_+; задано начальное (при $t=-\infty$) значение I_- адиабатического инварианта, и требуется найти его приращение $\Delta I = I_+ - I_-$ ко времени $t=+\infty$.

Из (50,10) имеем

$$\Delta I = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial\Lambda}{\partial w}\,\dot{\lambda}\,dt. \tag{51,2}$$

Как уже было указано, величина Λ — периодическая (с периодом 2π) функция переменной w; разложим ее в ряд Фурье:

$$\Lambda = \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{ilw}\Lambda_l \tag{51,3}$$

(в силу вещественности Λ коэффициенты разложения связаны при этом соотношениями $\Lambda_{-l} = \Lambda_l^*$). Отсюда для производной $\partial\Lambda/\partial w$ имеем

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial w} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} ile^{ilw}\Lambda_l = 2\,\mathrm{Re}\sum_{l=1}^{\infty} ile^{ilw}\Lambda_l. \tag{51,4}$$

При достаточно малом $\dot{\lambda}$ производная $\dot{w}$ положительна (ее знак совпадает со знаком ω, см. (50,11)), т. е. w — монотонная функция времени t. При переходе в (51,2) от интегрирования по dt к интегрированию по dw пределы останутся поэтому прежними:

$$\Delta I = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial\Lambda}{\partial w}\,\frac{d\lambda}{dt}\,\frac{dt}{dw}\,dw. \tag{51,5}$$

Подставим сюда (51,4) и преобразуем интеграл, рассматривая в нем формальным образом w как комплексную переменную. Предположив, что подынтегральное выражение не имеет особых точек при вещественных значениях w, сместим путь интегрирования с вещественной оси w в верхнюю полуплоскость этой переменной. При этом контур «зацепляется» за особые точки подынтегрального выражения и, огибая их, принимает вид, показанный схематически на рис. 56. Пусть w_0 — ближайшая к вещественной оси особая точка, т. е. точка с наименьшей по величине (положительной) мнимой частью. Главный вклад в интеграл (51,5) возникает от окрестности этой точки, причем каждый из членов ряда (51,4) дает вклад, содержащий множитель $\exp(-l \operatorname{Im} w_0)$. Сохраняя опять-таки лишь член с наименьшим по абсолютной величине отрицательным показателем (т. е. член с $l = 1$), найдем, что[1]

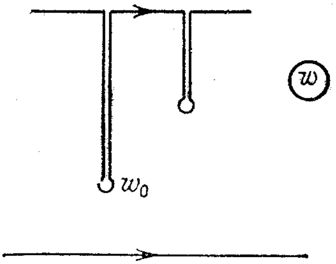

Рис. 56

$$\Delta I \propto \exp(-\operatorname{Im} w_0). \qquad (51,6)$$

Пусть t_0 — «момент времени» (комплексное число!), отвечающий особой точке w_0: $w(t_0) = w_0$. По порядку величины $|t_0|$ совпадает, вообще говоря, с характерным временем изменения параметров системы; обозначим это время через τ[2]. Порядок же величины показателя степени в (51,6) будет

$$\operatorname{Im} w_0 \sim \omega\tau \sim \tau/T. \qquad (51,7)$$

Поскольку, по предположению, $\tau \gg T$, то этот показатель велик. Таким образом, разность $I_+ - I_-$ убывает экспоненциально при уменьшении скорости изменения параметров системы[3].

Для определения w_0 в первом приближении по T/τ (т. е. с сохранением лишь члена $\sim (T/\tau)^{-1}$ в показателе) можно отбросить в уравнении (50,11) малый член, содержащий $\dot\lambda$, т. е. писать

$$\frac{dw}{dt} = \omega(I, \lambda(t)), \qquad (51,8)$$

---

[1]) В специальных случаях может оказаться, что разложение (51,4) не содержит члена с $l = 1$ (см., например, задачу 1 к этому параграфу); во всех случаях надо брать член с наименьшим имеющимся в ряду значением l.

[2]) Если медленность изменения параметра λ выражается в том, что он зависит от t лишь в виде отношения $\xi = t/\tau$ с большим τ, то $t_0 = \tau\xi_0$, где ξ_0 — не зависящая от τ особая точка функции $\lambda(\xi)$.

[3]) Отметим, что если начальное и конечное значения функции $\lambda(t)$ совпадают ($\lambda_+ = \lambda_-$), то экспоненциально малой будет не только разность ΔI, но вместе с нею также и разность $\Delta E = E_+ - E_-$ конечной и начальной энергии; согласно (49,9) будем иметь $\Delta E = \omega \Delta I$.

причем аргумент I функции $\omega(I, \lambda)$ полагается постоянным, скажем, равным I_-. Тогда

$$w_0 = \int^{t_0} \omega(I, \lambda(t))\, dt \tag{51,9}$$

(в качестве нижнего предела можно взять любое вещественное значение t; интересующая нас мнимая часть w_0 от этого значения не зависит) [1].

Интеграл же (51,5) с $\dot{w}$ из (51,8) (и с одним членом ряда (51,4) в качестве $\partial\Lambda/\partial w$) принимает вид

$$\Delta I \propto \operatorname{Re} \int i e^{iw} \frac{\dot{\lambda}\, dw}{\omega(I, \lambda)}. \tag{51,10}$$

Отсюда видно, что в качестве конкурирующих (при отборе ближайшей к вещественной оси) особых точек фигурируют особенности (полюсы, точки ветвления) функций $\dot{\lambda}(t)$ и $1/\omega(t)$. Напомним в этой связи, что заключение об экспоненциальной малости ΔI связано с предположением, что указанные функции не имеют вещественных особых точек.

Задачи

1. Оценить ΔI для гармонического осциллятора с частотой, медленно меняющейся по закону

$$\omega^2 = \omega_0^2 \frac{1 + a e^{\alpha t}}{1 + e^{\alpha t}}$$

от значения $\omega_- = \omega_0$ при $t = -\infty$ до $\omega_+ = \sqrt{a}\,\omega_0$ при $t = \infty$ ($a > 0$, $\alpha \ll \omega_0$)[2].

Решение. Понимая под параметром λ саму частоту ω, имеем

$$\frac{\dot{\lambda}}{\omega} = \frac{\alpha}{2}\left(\frac{a}{e^{-\alpha t} + a} - \frac{1}{e^{-\alpha t} + 1}\right).$$

Эта функция имеет полюсы при $e^{-\alpha t} = -1$ и $e^{-\alpha t} = -a$. Вычислив интеграл $\int \omega\, dt$, найдем, что наименьшее значение $\operatorname{Im} w_0$ происходит от одного из полюсов $\alpha t_0 = -\ln(-a)$ и равно

$$\operatorname{Im} w_0 = \begin{cases} \omega_0 \pi/\alpha & \text{при } a > 1, \\ \omega_0 \pi \sqrt{a}/\alpha & \text{при } a < 1. \end{cases}$$

Для гармонического осциллятора $\Lambda \propto \sin 2w$ (см. задачу к § 50), так что ряд (51,3) сводится к двум членам (с $l = \pm 2$). Поэтому для гармонического осциллятора

$$\Delta I \propto \exp(-2 \operatorname{Im} w_0).$$

---

[1] Более подробное доказательство сделанных утверждений, а также вычисление предэкспоненциального множителя в формуле (51,6), можно найти в статье: Слуцкин А. А.//ЖЭТФ. — 1963. — Т. 45. — С. 978.

[2] Гармоничность осциллятора проявляется в независимости частоты колебаний от энергии.

2. Частица совершает колебания в потенциальной яме. Определить закон изменения ее энергии под действием силы трения $f_{\text{тр}} = -\alpha\dot{x}$ с малым коэффициентом α (x — декартова координата).

Решение. Усредним уравнение (25,13) по периоду колебаний, пренебрегая в первом приближении их затуханием. Имеем

$$\frac{d\overline{E}}{dt} = -\alpha\overline{\dot{x}^2} = -\frac{\alpha}{T}\int_0^T \dot{x}^2\,dt = -\frac{\alpha}{T}\oint \dot{x}\,dx = -\frac{2\pi\alpha}{mT} I(\overline{E}),$$

где $I(E)$ — адиабатический инвариант, m — масса частицы. Выражая период колебаний T через I согласно (49,8), находим

$$\frac{dI}{d\overline{E}}\frac{d\overline{E}}{dt} = -\frac{\alpha}{m} I.$$

Интегрируя, получаем

$$I(\overline{E}) = I(E_0)\exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right). \qquad (1)$$

Формула (1) определяет в неявном виде зависимость $\overline{E}(t)$. Для гармонического осциллятора (1) переходит в (25,5). Решение справедливо при условии $\frac{\alpha}{m}T \ll 1$.

§ 52. Условно-периодическое движение

Рассмотрим замкнутую систему со многими степенями свободы, совершающую финитное (по всем координатам) движение. Предположим при этом, что задача допускает полное разделение переменных в методе Гамильтона — Якоби. Это значит, что при соответствующем выборе координат укороченное действие представляет собой сумму

$$S_0 = \sum_i S_i(q_i) \qquad (52,1)$$

функций, каждая из которых зависит только от одной из координат.

Поскольку обобщенные импульсы

$$p_i = \frac{\partial S_0}{\partial q_i} = \frac{dS_i}{dq_i},$$

то каждая из функций S_i может быть представлена в виде

$$S_i = \int p_i\,dq_i. \qquad (52,2)$$

Эти функции неоднозначны. В силу финитности движения каждая из координат может пробегать значения лишь в определенном конечном интервале. При изменении q_i в этом интервале «вперед» и «назад» действие получает приращение

$$\Delta S_0 = \Delta S_i = 2\pi I_i, \qquad (52,3)$$