2. Частица совершает колебания в потенциальной яме. Определить закон изменения ее энергии под действием силы трения $f_{\text{тр}} = -\alpha\dot{x}$ с малым коэффициентом α (x — декартова координата).

Решение. Усредним уравнение (25,13) по периоду колебаний, пренебрегая в первом приближении их затуханием. Имеем

$$\frac{d\overline{E}}{dt} = -\alpha\overline{\dot{x}^2} = -\frac{\alpha}{T}\int_0^T \dot{x}^2\,dt = -\frac{\alpha}{T}\oint \dot{x}\,dx = -\frac{2\pi\alpha}{mT}I(\overline{E}),$$

где $I(E)$ — адиабатический инвариант, m — масса частицы. Выражая период колебаний T через I согласно (49,8), находим

$$\frac{dI}{d\overline{E}}\frac{d\overline{E}}{dt} = -\frac{\alpha}{m}I.$$

Интегрируя, получаем

$$I(\overline{E}) = I(E_0)\exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right). \qquad (1)$$

Формула (1) определяет в неявном виде зависимость $\overline{E}(t)$. Для гармонического осциллятора (1) переходит в (25,5). Решение справедливо при условии $\frac{\alpha}{m}T \ll 1$.

§ 52. Условно-периодическое движение

Рассмотрим замкнутую систему со многими степенями свободы, совершающую финитное (по всем координатам) движение. Предположим при этом, что задача допускает полное разделение переменных в методе Гамильтона — Якоби. Это значит, что при соответствующем выборе координат укороченное действие представляет собой сумму

$$S_0 = \sum_i S_i(q_i) \qquad (52,1)$$

функций, каждая из которых зависит только от одной из координат.

Поскольку обобщенные импульсы

$$p_i = \frac{\partial S_0}{\partial q_i} = \frac{dS_i}{dq_i},$$

то каждая из функций S_i может быть представлена в виде

$$S_i = \int p_i\,dq_i. \qquad (52,2)$$

Эти функции неоднозначны. В силу финитности движения каждая из координат может пробегать значения лишь в определенном конечном интервале. При изменении q_i в этом интервале «вперед» и «назад» действие получает приращение

$$\Delta S_0 = \Delta S_i = 2\pi I_i, \qquad (52,3)$$

где I_i есть интеграл

$$I_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i \, dq_i, \tag{52,4}$$

взятый по указанному изменению q_i [1]).

Произведем теперь каноническое преобразование аналогично тому, как это было сделано в § 50 для случая одной степени свободы. Новыми переменными будут «переменные действия» I_i и «угловые переменные»

$$w_i = \frac{\partial S_0(q, I)}{\partial I_i} = \sum_k \frac{\partial S_k(q_k, I)}{\partial I_i}, \tag{52,5}$$

где производящей функцией снова является действие, выраженное через координаты и величины I_i; уравнения движения в этих переменных

$$\dot{I}_i = 0, \quad \dot{w}_i = \frac{\partial E(I)}{\partial I_i}$$

дают:

$$I_i = \mathrm{const}, \tag{52,6}$$

$$w_i = \frac{\partial E(I)}{\partial I_i} t + \mathrm{const}. \tag{52,7}$$

Мы найдем также аналогично (50,7), что полному изменению координаты q_i («вперед» и «назад») отвечает изменение соответствующего w_i на 2π:

$$\Delta w_i = 2\pi. \tag{52,8}$$

Другими словами, величины $w_i(q, I)$ являются неоднозначными функциями координат, которые при изменении последних с возвращением к первоначальным значениям могут изменяться на любое целое кратное от 2π. Это свойство можно сформулировать также и как свойство функции $w_i(p, q)$ (выраженной через координаты и импульсы) в фазовом пространстве системы. Поскольку сами величины I_i, если их выразить через p и q, являются однозначными функциями этих переменных, то, подставив $I_i(p, q)$ в $w_i(q, I)$, мы получим функцию $w_i(p, q)$, которая при обходе по любой замкнутой кривой в фазовом пространстве может измениться на целое кратное от 2π (либо на нуль).

[1]) Подчеркнем, однако, что здесь идет речь о формальном изменении координаты q_i во всем допустимом интервале ее значений, а не об изменении за период реального движения (как это было в случае одномерного движения). Реальное финитное движение системы с несколькими степенями свободы не только не является в общем случае периодическим в целом, но даже изменение со временем каждой из ее координат в отдельности не является периодическим (см. ниже).

Отсюда следует, что всякая однозначная функция состояния системы $F(p, q)$ [1]), будучи выражена через канонические переменные, является периодической функцией угловых переменных с периодом 2π по каждой из них. Ее можно поэтому разложить в кратный ряд Фурье вида

$$F = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \ldots \sum_{l_s=-\infty}^{\infty} A_{l_1 l_2 \ldots l_s} e^{i(l_1 w_1 + \ldots + l_s w_s)}$$

($l_1, l_2, \ldots, l_s$ — целые числа). Подставив же сюда угловые переменные как функции времени, найдем, что временная зависимость F определяется суммой вида

$$F = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \ldots \sum_{l_s=-\infty}^{\infty} A_{l_1 l_2 \ldots l_s} \exp\left\{ it \left(l_1 \frac{\partial E}{\partial I_1} + \ldots + l_s \frac{\partial E}{\partial I_s} \right) \right\}. \tag{52,9}$$

Каждый из членов этой суммы есть периодическая функция времени с частотой

$$l_1\omega_1 + \ldots + l_s\omega_s, \tag{52,10}$$

представляющей собой сумму целых кратных от основных частот

$$\omega_i = \frac{\partial E}{\partial I_i}. \tag{52,11}$$

Но поскольку все частоты (52,10) не являются, вообще говоря, целыми кратными (или рациональными частями) какой-либо одной из них, то вся сумма в целом не является строго периодической функцией. Это относится, в частности, и к самим координатам q и импульсам p системы.

Таким образом, движение системы не является в общем случае строго периодическим ни в целом, ни по какой-либо из координат. Это значит, что если система прошла через какое-либо состояние, то она не пройдет через него повторно ни через какое конечное время. Можно, однако, утверждать, что по истечении достаточно большого промежутка времени она пройдет сколь угодно близко от этого состояния. Это свойство имеют в виду, называя такое движение *условно-периодическим*.

В различных частных случаях две (или более) из основных частот ω_i могут оказаться соизмеримыми (при произвольных значениях величин I_i). В таких случаях говорят о наличии *вырождения*, а если все s частот соизмеримы, то движение

[1]) «Вращательные координаты» — углы φ (см. примечание на стр. 200) — неоднозначно связаны с состоянием системы, так как значения φ, отличающиеся на целое кратное от 2π, отвечают одному и тому же положению системы. Поэтому, если среди координат q имеются такие углы, то они могут входить в функцию $F(q, p)$ лишь в виде таких выражений, как $\cos\varphi$ или $\sin\varphi$, связь которых с состоянием системы однозначна.

системы называют *полностью вырожденным*. В последнем случае, очевидно, движение строго периодично и тем самым траектории всех частиц — замкнуты.

Наличие вырождения приводит, прежде всего, к уменьшению числа независимых величин (I_i), от которых зависит энергия системы. Пусть две частоты ω_1 и ω_2 связаны соотношением

$$n_1 \frac{\partial E}{\partial I_1} = n_2 \frac{\partial E}{\partial I_2}, \tag{52,12}$$

где n_1 и n_2 — целые числа. Отсюда следует, что величины I_1 и I_2 входят в энергию лишь в виде суммы $n_2 I_1 + n_1 I_2$.

Весьма важной особенностью вырожденных движений является увеличение числа однозначных интегралов движения по сравнению с их числом в общем случае невырожденной системы (с тем же числом степеней свободы). В последнем случае из полного числа $(2s - 1)$ всех интегралов движения однозначными являются всего s функций состояния системы; их полный набор составляют, например, s величин I_i. Остальные $s - 1$ интегралов можно представить в виде разностей

$$w_i \frac{\partial E}{\partial I_k} - w_k \frac{\partial E}{\partial I_i}. \tag{52,13}$$

Постоянство этих величин непосредственно следует из формулы (52,7), но ввиду неоднозначности угловых переменных они не являются однозначными функциями состояния системы.

При наличии же вырождения положение меняется. Так, ввиду связи (52,12) интеграл

$$w_1 n_2 - w_2 n_1 \tag{52,14}$$

хотя и является неоднозначным, но его неоднозначность сводится к прибавлению любого целого кратного 2π. Поэтому достаточно взять тригонометрическую функцию этой величины, для того чтобы получить новый однозначный интеграл движения.

Примером вырожденного движения является движение в поле $U = -\alpha/r$ (см. задачу к этому параграфу). Именно это обстоятельство приводит к появлению нового, специфического однозначного интеграла движения (15,17), помимо двух (рассматриваем движение сразу как плоское) обычных однозначных интегралов, — момента M и энергии E, — свойственных движению в любом центральном поле.

Отметим также, что появление дополнительных однозначных интегралов приводит в свою очередь еще к одному свойству вырожденных движений — они допускают полное разделение переменных при различных, а не при одном определенном[1])

[1]) Мы отвлекаемся при этом от таких тривиальных изменений координат, как преобразования вида $q_1' = q_1'(q_1)$, $q_2' = q_2'(q_1)$.

выборе координат. Действительно, величины I_i в координатах, осуществляющих разделение переменных, являются однозначными интегралами движения. Но при наличии вырождения число однозначных интегралов превышает s, и потому становится неоднозначным выбор тех из них, которые мы хотим получить в качестве величин I_i.

В качестве примера снова упомянем кеплерово движение, допускающее разделение переменных как в сферических, так и в параболических координатах.

В предыдущем параграфе было показано, что при одномерном финитном движении переменная действия является адиабатическим инвариантом. Это утверждение остается в силе и для систем со многими степенями свободы. Оно доказывается в общем случае прямым обобщением способа, изложенного в начале § 51.

Для многомерной системы с переменным параметром $\lambda(t)$ уравнения движения в канонических переменных дают для скорости изменения каждой из переменных действия I_i выражение, аналогичное (50,10):

$$\dot{I}_i = -\frac{\partial \Lambda}{\partial w_i}\dot{\lambda}, \tag{52,15}$$

где по-прежнему $\Lambda = (\partial S_0/\partial\lambda)_I$. Усреднение этого равенства надо производить по промежутку времени, большому по сравнению с основными периодами системы, но малому по сравнению со временем изменения параметра $\lambda(t)$. При этом $\dot{\lambda}$ снова выносится из-под знака усреднения, а усреднение производных $\partial\Lambda/\partial w_i$ производится так, как если бы движение происходило при постоянном λ и потому было условно периодическим. Тогда Λ будет однозначной периодической функцией угловых переменных w_i и средние значения ее производных $\partial\Lambda/\partial w_i$ обращаются в нуль.

В заключение сделаем некоторые замечания по поводу свойств финитного движения замкнутых систем со многими (s) степенями свободы в наиболее общем случае, не предполагающем разделимости переменных в соответствующем уравнении Гамильтона — Якоби.

Основным свойством систем с разделяющимися переменными является однозначность интегралов движения I_i, число которых равно числу степеней свободы. В общем же случае систем с неразделяющимися переменными набор однозначных интегралов движения ограничивается теми, постоянство которых есть выражение свойств однородности и изотропии пространства и времени, т. е. законами сохранения энергии, импульса и момента.

Фазовая траектория системы проходит по тем областям фазового пространства, которые определяются заданными постоянными значениями однозначных интегралов движения. Для системы с разделяющимися переменными с ее s однозначными интегралами этими условиями определяется s-мерное многообразие в фазовом пространстве. В течение достаточно долгого времени траектория системы покроет это многообразие сколь угодно плотно.

У системы же с неразделяющимися переменными, с ее меньшим (при том же s) числом однозначных интегралов фазовая траектория может заполнять собой в фазовом пространстве области (многообразия) большего числа измерений.

Наконец, укажем, что если гамильтонова функция системы отличается от функции, допускающей разделение переменных, лишь малыми членами, то и свойства движения близки к свойствам условно-периодических движений, причем степень этой близости гораздо выше, чем степень малости дополнительных членов в функции Гамильтона.

Задача

Вычислить переменные действия для эллиптического движения в поле $U = -\alpha/r$.

Решение. В полярных координатах r, φ в плоскости движения имеем:

$$I_\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p_\varphi \, d\varphi = M,$$

$$I_r = \frac{2}{2\pi}\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{2m\left(E + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{M^2}{r^2}}\, dr = -M + \alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|}}.$$

Отсюда энергия, выраженная через переменные действия:

$$E = -\frac{m\alpha^2}{2(I_r + I_\varphi)^2}.$$

Она зависит лишь от суммы $I_r + I_\varphi$, что означает вырождение движения — обе основные частоты (по φ и по r) совпадают.

Параметры орбиты p и e (см. (15,4)) выражаются через I_r, I_φ согласно

$$p = \frac{I_\varphi^2}{m\alpha}, \qquad e^2 = 1 - \left(\frac{I_\varphi}{I_\varphi + I_r}\right)^2.$$

В силу адиабатической инвариантности величин I_r, I_φ, при медленном изменении коэффициента α или массы m эксцентриситет орбиты остается неизменным, а ее размеры меняются обратно пропорционально m и α.