была бы быть отличной от скорости в противоположном направлении.

Таким образом, принцип относительности приводит к результату, что время не является абсолютным. Время течет по-разному в разных системах отсчета. Следовательно, утверждение, что между двумя данными событиями прошел определенный промежуток времени, приобретает смысл только тогда, когда указано, к какой системе отсчета это утверждение относится. В частности, события, одновременные в некоторой системе отсчета, будут не одновременными в другой системе.

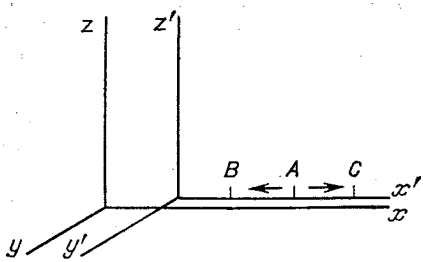

Рис. 1

Для уяснения этого полезно рассмотреть следующий простой пример.

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета K и K' с осями координат соответственно xyz и $x'y'z'$, причем система K' движется относительно K вправо вдоль осей x и x' (рис. 1).

Пусть из некоторой точки A на оси x' отправляются сигналы в двух взаимно противоположных направлениях. Поскольку скорость распространения сигнала в системе K', как и во всякой инерциальной системе, равна (в обоих направлениях) c, то сигналы достигнут равноудаленных от A точек B и C в один и тот же момент времени (в системе K').

Легко, однако, видеть, что те же самые два события (приход сигнала в B и C) будут отнюдь не одновременными для наблюдателя в системе K. Действительно, скорость сигналов относительно системы K согласно принципу относительности равна тому же c, и поскольку точка B движется (относительно системы K) навстречу посланному в нее сигналу, а точка C — по направлению от сигнала (посланному из A в C), то в системе K сигнал придет в точку B раньше, чем в точку C.

Таким образом, принцип относительности Эйнштейна вносит фундаментальные изменения в основные физические понятия. Заимствованные нами из повседневного опыта представления о пространстве и времени оказываются лишь приближенными, связанными с тем, что в повседневной жизни нам приходится иметь дело только со скоростями, очень малыми по сравнению со скоростью света.

§ 2. Интервал

В дальнейшем мы будем часто пользоваться понятием *события*. Событие определяется местом, где оно произошло, и временем, когда оно произошло. Таким образом, событие, происхо-

дящее с некоторой материальной частицей, определяется тремя координатами этой частицы и моментом времени, когда происходит событие.

Часто полезно из соображений наглядности пользоваться воображаемым четырехмерным пространством, на осях которого откладываются три пространственные координаты и время. В этом пространстве событие изображается точкой. Эти точки называются *мировыми точками*. Всякой частице соответствует некоторая линия (*мировая линия*) в этом четырехмерном пространстве. Точки этой линии определяют координаты частицы во все моменты времени. Равномерно и прямолинейно движущейся материальной частице соответствует прямая мировая линия.

Выразим теперь принцип инвариантности скорости света математически. Для этого рассмотрим две системы отсчета K и K', движущиеся друг относительно друга с постоянной скоростью. Координатные оси выберем при этом таким образом, чтобы оси x и x' совпадали, а оси y и z были параллельны осям y' и z'; время в системах K и K' обозначим через t и t'.

Пусть первое событие состоит в том, что отравляется сигнал, распространяющийся со скоростью света, из точки, имеющей координаты x_1, y_1, z_1 в системе K в момент времени t_1 в этой же системе. Будем наблюдать из системы K распространение этого сигнала. Пусть второе событие состоит в том, что сигнал приходит в точку x_2, y_2, z_2 в момент времени t_2. Сигнал распространяется со скоростью c; пройденное им расстояние равно поэтому $c(t_2-t_1)$. С другой стороны, это же расстояние равно $[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2]^{1/2}$. Таким образом, мы можем написать следующую зависимость между координатами обоих событий в системе K:

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2-c^2(t_2-t_1)^2=0. \qquad (2,1)$$

Те же два события, т. е. распространение сигнала, можно наблюдать из системы K'. Пусть координаты первого события в системе K': x'_1, y'_1, z'_1, t'_1, а второго: x'_2, y'_2, z'_2, t'_2. Поскольку скорость света в системах K и K' одинакова, то, аналогично (2,1), имеем:

$$(x'_2-x'_1)^2+(y'_2-y'_1)^2+(z'_2-z'_1)^2-c^2(t'_2-t'_1)^2=0. \qquad (2,2)$$

Если x_1, y_1, z_1, t_1 и x_2, y_2, z_2, t_2 — координаты каких-либо двух событий, то величина

$$s_{12}=\left[c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2\right]^{1/2} \qquad (2,3)$$

называется *интервалом* между этими двумя событиями.

Таким образом, из инвариантности скорости света следует, что если интервал между двумя событиями равен нулю в одной системе отсчета, то он равен нулю и во всякой другой системе.

Если два события бесконечно близки друг к другу, то для интервала ds между ними имеем:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \tag{2,4}$$

Форма выражения (2,3) или (2,4) позволяет рассматривать интервал, с формальной математической точки зрения, как расстояние между двумя точками в воображаемом четырехмерном пространстве (на осях которого откладываем x, y, z и произведение ct). Имеется, однако, существенное отличие в правиле составления этой величины по сравнению с правилом обычной геометрии: при образовании квадрата интервала квадраты разностей координат по различным осям суммируются не с одинаковыми, а с различными знаками[1]).

Как было показано выше, если $ds = 0$ в некоторой инерциальной системе отсчета, то $ds' = 0$ и в другой системе. С другой стороны, ds и ds' — бесконечно малые одинакового порядка. Из этих двух обстоятельств следует, что ds^2 и ds'^2 должны быть пропорциональны друг другу:

$$ds^2 = a\, ds'^2,$$

причем коэффициент a может зависеть только от абсолютной величины относительной скорости обеих инерциальных систем. Он не может зависеть от координат и времени, так как тогда различные точки пространства и моменты времени были бы не равноценны, что противоречит однородности пространства и времени. Он не может зависеть также и от направления относительной скорости, так как это противоречило бы изотропности пространства.

Рассмотрим три системы отсчета K, K_1, K_2 и пусть $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$ — скорости движения систем K_1 и K_2 относительно K. Тогда имеем:

$$ds^2 = a(V_1)\, ds_1^2, \quad ds^2 = a(V_2)\, ds_2^2.$$

С тем же основанием можно написать:

$$ds_1^2 = a(V_{12})\, ds_2^2,$$

где V_{12} — абсолютная величина скорости движения K_2 относительно K_1. Сравнивая друг с другом эти соотношения, найдем, что должно быть:

$$\frac{a(V_2)}{a(V_1)} = a(V_{12}). \tag{2,5}$$

---

[1]) Четырехмерную геометрию, определяемую квадратичной формой (2,4), называют *псевдоевклидовой* в отличие от обычной, евклидовой, геометрии. Эта геометрия была введена в связи с теорией относительности *Г. Минковским.*

Но V_{12} зависит не только от абсолютных величин векторов $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$, но и от угла между ними. Между тем последний вообще не входит в левую часть соотношения (2,5). Ясно поэтому, что это соотношение может быть справедливым лишь, если функция $a(V)$ сводится к постоянной величине, равной, как это следует из того же соотношения, единице.

Таким образом,

$$ds^2 = ds'^2, \tag{2,6}$$

а из равенства бесконечно малых интервалов следует равенство также и конечных интервалов: $s = s'$.

Мы приходим, следовательно, к важнейшему результату: интервал между событиями одинаков во всех инерциальных системах отсчета, т. е. является инвариантом по отношению к преобразованию от одной инерциальной системы отсчета к любой другой. Эта инвариантность и является математическим выражением постоянства скорости света.

Пусть опять x_1, y_1, z_1, t_1 и x_2, y_2, z_2, t_2 — координаты двух событий в некоторой системе отсчета K. Спрашивается, существует ли такая система отсчета K', в которой оба эти события происходили бы в одном и том же месте пространства.

Введем обозначения

$$t_2 - t_1 = t_{12}, \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l_{12}^2.$$

Тогда квадрат интервала между событиями в системе K:

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2$$

и в системе K':

$$s_{12}'^2 = c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2,$$

причем в силу инвариантности интервала

$$c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2.$$

Мы хотим, чтобы в системе K' оба события произошли в одной точке, т. е. чтобы $l_{12}' = 0$. Тогда

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 > 0.$$

Следовательно, система отсчета с требуемым свойством существует, если $s_{12}^2 > 0$. т. е. если интервал между обоими событиями вещественный. Вещественные интервалы называют *времениподобными*.

Таким образом, если интервал между двумя событиями времениподобный, то существует такая система отсчета, в которой оба события произошли в одном и том же месте. Время, которое пройдет между этими событиями в этой системе, равно

$$t_{12}' = \frac{1}{c}\sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2} = \frac{s_{12}}{c}. \tag{2,7}$$

Если какие-нибудь два события происходят с одним и тем же телом, то интервал между ними всегда времениподобный. Действительно, путь, который тело проходит между обоими событиями, не может быть больше ct_{12}, так как скорость тела не может быть больше c. Поэтому всегда

$$l_{12} < ct_{12}.$$

Зададимся теперь вопросом, нельзя ли выбрать такую систему отсчета, в которой два события произошли бы в одно и то же время. По-прежнему мы имеем в системах K и K': $c^2t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2t_{12}'^2 - l_{12}'^2$. Мы хотим, чтобы $t_{12}' = 0$; отсюда

$$s_{12}^2 = -l_{12}'^2 < 0.$$

Следовательно, искомую систему отсчета можно найти только в том случае, когда интервал s_{12} между двумя событиями мнимый. Мнимые интервалы называют *пространственноподобными*.

Таким образом, если интервал между двумя событиями пространственноподобный, то существует такая система отсчета, в которой оба события происходят одновременно. Расстояние между точками, где произошли эти события в этой системе отсчета, равно

$$l_{12}' = \sqrt{l_{12}^2 - c^2t_{12}^2} = is_{12}. \qquad (2,8)$$

Подразделение интервалов на времениподобные и пространственноподобные есть, в силу их инвариантности, понятие абсолютное. Это значит, что свойство интервала быть времениподобным или пространственноподобным не зависит от системы отсчета.

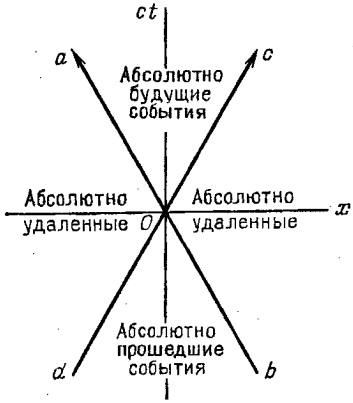

Рис. 2

Возьмем какое-нибудь событие — назовем его событием O — в качестве начала отсчета времени и пространственных координат. Другими словами, в четырехмерной системе координат, на осях которой откладываются x, y z и t, мировая точка события O будет началом координат. Посмотрим теперь, в каком отношении к данному событию O находятся все остальные события. Для наглядности мы будем рассматривать только одну пространственную координату и время, откладывая их на двух осях (рис. 2). Прямолинейное равномерное движение частицы, проходящей точку $x=0$ при $t=0$, изобразится прямой линией, проходящей через O и наклоненной к оси t под углом, тангенс которого равен скорости частицы. Поскольку наибольшая

возможная скорость равна c, то существует наибольший угол, который может образовывать эта прямая с осью t. На рис. 2 изображены две прямые, изображающие распространение двух сигналов (со скоростью света) в противоположных направлениях, проходящих через событие O (т. е. проходящих $x=0$ при $t=0$). Все линии, изображающие движения частиц, могут лежать только внутри областей aOc и dOb. На прямых ab и cd, очевидно, $x=\pm ct$. Рассмотрим сначала события, мировые точки которых лежат внутри области aOc. Легко сообразить, что во всех точках этой области $c^2t^2-x^2>0$. Другими словами, интервалы между любым событием этой области и событием O — времениподобные. В этой области $t>0$, т. е. все события этой области происходят «после» события O. Но два события, разделенных времениподобным интервалом, ни в какой системе отсчета не могут происходить одновременно. Следовательно, нельзя выбрать и никакой системы отсчета, где бы какое-нибудь из событий области aOc происходило «до» события O, т. е. когда было бы $t<0$. Таким образом, все события области aOc являются будущими по отношению к O, и притом во всех системах отсчета. Эту область можно поэтому назвать «абсолютно будущей» по отношению к событию O.

Совершенно аналогично все события области bOd являются «абсолютно прошедшими» по отношению к O, т. е. события этой области во всех системах отсчета происходят до события O.

Наконец, рассмотрим еще области dOa и cOb. Интервал между любым событием этой области и событием O — пространственноподобный. В любой системе отсчета эти события происходят в разных местах пространства. Поэтому эти области можно назвать «абсолютно удаленными» по отношению к O. Понятия «одновременно», «раньше» и «позже» для этих событий, однако, относительны. Для всякого события этой области есть такие системы отсчета, где оно происходит позже события O, системы, где оно происходит раньше O, и, наконец, одна система отсчета, где оно происходит одновременно с O.

Заметим, что если рассматривать все три пространственные координаты вместо одной, то вместо двух пересекающихся прямых на рис. 2 мы имели бы «конус» $x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0$ в четырехмерной системе координат x, y, z, t, ось которого совпадает с осью t (этот конус называют *световым конусом*). Области «абсолютно будущего» и «абсолютно прошедшего» изображаются тогда соответственно двумя внутренними полостями этого конуса.

Два события могут быть причинно связаны друг с другом только в том случае, если интервал между ними времениподобный, что непосредственно следует из того, что никакое взаимодействие не может распространяться со скоростью, большей скорости света. Как мы только что видели, как раз для таких

событий имеют абсолютный смысл понятия «раньше» и «позже», что является необходимым условием для того, чтобы имели смысл понятия причины и следствия.

§ 3. Собственное время

Предположим, что мы наблюдаем из некоторой инерциальной системы отсчета произвольным образом движущиеся относительно нас часы. В каждый отдельный момент времени это движение можно рассматривать как равномерное. Поэтому в каждый момент времени можно ввести неподвижно связанную с движущимися часами систему координат, которая (вместе с часами) будет являться тоже инерциальной системой отсчета.

В течение бесконечно малого промежутка времени dt (по неподвижным, т. е. связанным с нами, часам) движущиеся часы проходят расстояние

$$\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}.$$

Спрашивается, какой промежуток времени dt' покажут при этом движущиеся часы. В системе координат, связанной с движущимися часами, последние покоятся, т. е. $dx'=dy'=dz'=0$. В силу инвариантности интервала

$$ds^2=c^2\,dt^2-dx^2-dy^2-dz^2=c^2\,dt'^2,$$

откуда

$$dt'=dt\sqrt{1-\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{c^2\,dt^2}}.$$

Но

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=v^2,$$

где v есть скорость движущихся часов; поэтому

$$dt'=\frac{ds}{c}=dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{3,1}$$

Интегрируя это выражение, можно найти промежуток времени, показываемый движущимися часами, если по неподвижным часам пройдет время t_2-t_1:

$$t'_2-t'_1=\int\limits_{t_1}^{t_2}dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{3,2}$$

Время, отсчитываемое по часам, движущимся вместе с данным объектом, называется *собственным временем* этого объекта. Формулы (3,1) и (3,2) выражают собственное время через время системы отсчета, относительно которой рассматривается движение.

Как видно из (3,1) или (3,2), собственное время движущегося объекта всегда меньше, чем соответствующий промежуток времени в неподвижной системе. Другими словами, движущиеся часы идут медленнее неподвижных.