событий имеют абсолютный смысл понятия «раньше» и «позже», что является необходимым условием для того, чтобы имели смысл понятия причины и следствия.

§ 3. Собственное время

Предположим, что мы наблюдаем из некоторой инерциальной системы отсчета произвольным образом движущиеся относительно нас часы. В каждый отдельный момент времени это движение можно рассматривать как равномерное. Поэтому в каждый момент времени можно ввести неподвижно связанную с движущимися часами систему координат, которая (вместе с часами) будет являться тоже инерциальной системой отсчета.

В течение бесконечно малого промежутка времени dt (по неподвижным, т. е. связанным с нами, часам) движущиеся часы проходят расстояние

$$\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}.$$

Спрашивается, какой промежуток времени dt' покажут при этом движущиеся часы. В системе координат, связанной с движущимися часами, последние покоятся, т. е. $dx'=dy'=dz'=0$. В силу инвариантности интервала

$$ds^2=c^2\,dt^2-dx^2-dy^2-dz^2=c^2\,dt'^2,$$

откуда

$$dt'=dt\sqrt{1-\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{c^2\,dt^2}}.$$

Но

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=v^2,$$

где v есть скорость движущихся часов; поэтому

$$dt'=\frac{ds}{c}=dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{3,1}$$

Интегрируя это выражение, можно найти промежуток времени, показываемый движущимися часами, если по неподвижным часам пройдет время t_2-t_1:

$$t'_2-t'_1=\int\limits_{t_1}^{t_2}dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{3,2}$$

Время, отсчитываемое по часам, движущимся вместе с данным объектом, называется *собственным временем* этого объекта. Формулы (3,1) и (3,2) выражают собственное время через время системы отсчета, относительно которой рассматривается движение.

Как видно из (3,1) или (3,2), собственное время движущегося объекта всегда меньше, чем соответствующий промежуток времени в неподвижной системе. Другими словами, движущиеся часы идут медленнее неподвижных.

Пусть относительно инерциальной системы отсчета K движутся прямолинейно и равномерно другие часы. Система отсчета K', связанная с этими последними, тоже инерциальная. Тогда часы в системе K' с точки зрения наблюдателя в системе K отстают по сравнению с его часами. И наоборот, с точки зрения системы K' отстают часы в системе K. Убедиться в отсутствии какого-либо противоречия можно, обратив внимание на следующее обстоятельство. Для того чтобы установить, что часы в системе K' отстают относительно часов в системе K, надо поступить следующим образом. Пусть в некоторый момент времени часы K' пролетают мимо часов в K, и в этот момент показания обоих часов совпадают. Для сравнения хода часов K и K' надо вновь сравнить показания тех же движущихся часов K' с часами в K. Но теперь мы уже сравниваем эти часы с другими часами в K — с теми, мимо которых часы K' пролетают в другой момент. При этом обнаружится, что часы K' будут отставать по сравнению с часами в K, с которыми они сравниваются. Мы видим, что для сравнения хода часов в двух системах отсчета необходимы несколько часов в одной системе и одни в другой. Поэтому этот процесс не симметричен по отношению к обеим системам. Всегда окажутся отстающими те часы, которые сравниваются с разными часами в другой системе отсчета.

Если же имеются двое часов, из которых одни описывают замкнутую траекторию, возвращаясь в исходное место (к неподвижным часам), то окажутся отстающими именно движущиеся часы (по сравнению с неподвижными). Обратное рассуждение, в котором движущиеся часы рассматривались бы как неподвижные, теперь невозможно, так как часы, описывающие замкнутую траекторию, не движутся равномерно и прямолинейно, а потому связанная с ними система отсчета не является инерциальной.

Поскольку законы природы одинаковы только в инерциальных системах отсчета, то системы отсчета, связанные с неподвижными часами (инерциальная система) и с движущимися (неинерциальная), обладают разными свойствами, и рассуждение, приводящее к результату, что покоящиеся часы должны оказаться отстающими, неправильно.

Промежуток времени, показываемый часами, равен интегралу $\frac{1}{c}\int ds$, взятому вдоль мировой линии этих часов. Если часы неподвижны, то их мировая линия является прямой, параллельной оси времени; если же часы совершают неравномерное движение по замкнутому пути и возвращаются в исходное место, то их мировая линия будет кривой, проходящей через две точки на прямой мировой линии неподвижных часов, соответствующих началу и концу движения. С другой стороны, мы видели, что покоящиеся часы показывают всегда больший промежуток

времени, чем движущиеся. Таким образом, мы приходим к выводу, что интеграл $\int ds$, взятый между двумя заданными мировыми точками, имеет максимальное значение, если он берется по прямой мировой линии, соединяющей эти точки[1]).

§ 4. Преобразование Лоренца

Нашей целью будет сейчас нахождение формул преобразования от одной инерциальной системы отсчета к другой, т. е. формул, по которым, зная координаты x, y, z, t события в некоторой системе отсчета K, можно найти координаты x', y', z', t' того же события в другой инерциальной системе K'.

В классической механике этот вопрос решается очень просто. В силу абсолютности времени мы имеем там $t=t'$; далее, если оси координат выбраны так, как мы это обычно делаем (т. е. оси x и x' совпадают, оси y, z паралельны осям y', z', движение вдоль осей x и x'), то координаты y и z будут, очевидно, равны координатам y' и z', а координаты x и x' будут отличаться на расстояние, пройденное одной системой относительно другой; если начало отсчета времени выбрано в момент, когда обе системы координат совпадали, а скорость системы K' относительно K есть V, то это расстояние есть Vt. Таким образом,

$$x=x'+Vt,\ y=y',\ z=z',\ t=t'. \tag{4,1}$$

Эти формулы называются *преобразованием Галилея*. Легко проверить, что это преобразование, как и следовало, не удовлетворяет требованию теории относительности, — оно не оставляет инвариантными интервалы между событиями.

Релятивистские же формулы преобразования мы будем искать исходя из требования, чтобы они оставляли интервалы инвариантными.

Как мы видели в § 2, интервал между двумя событиями можно рассматривать как расстояние между соответствующими двумя мировыми точками в четырехмерной системе координат. Мы можем, следовательно, сказать, что искомое преобразование должно оставлять неизменными все длины в четырехмерном пространстве x, y, z, ct. Но такими преобразованиями являются только параллельные переносы и вращения системы координат. Из них переносы системы координат параллельно самой себе не представляют интереса, так как сводятся просто к переносу начала пространственных координат и изменению момента на-

---

[1]) Предполагается, разумеется, что эти точки и соединяющие их линии таковы, что все элементы ds вдоль линий времениподобны.

Указанное свойство интеграла связано с псевдоевклидовостью четырехмерной геометрии. В евклидовом пространстве интеграл был бы, конечно, минимален вдоль прямой линии.