времени, чем движущиеся. Таким образом, мы приходим к выводу, что интеграл $\int ds$, взятый между двумя заданными мировыми точками, имеет максимальное значение, если он берется по прямой мировой линии, соединяющей эти точки[1]).

§ 4. Преобразование Лоренца

Нашей целью будет сейчас нахождение формул преобразования от одной инерциальной системы отсчета к другой, т. е. формул, по которым, зная координаты x, y, z, t события в некоторой системе отсчета K, можно найти координаты x', y', z', t' того же события в другой инерциальной системе K'.

В классической механике этот вопрос решается очень просто. В силу абсолютности времени мы имеем там $t=t'$; далее, если оси координат выбраны так, как мы это обычно делаем (т. е. оси x и x' совпадают, оси y, z паралельны осям y', z', движение вдоль осей x и x'), то координаты y и z будут, очевидно, равны координатам y' и z', а координаты x и x' будут отличаться на расстояние, пройденное одной системой относительно другой; если начало отсчета времени выбрано в момент, когда обе системы координат совпадали, а скорость системы K' относительно K есть V, то это расстояние есть Vt. Таким образом,

$$x=x'+Vt,\ y=y',\ z=z',\ t=t'. \tag{4,1}$$

Эти формулы называются *преобразованием Галилея*. Легко проверить, что это преобразование, как и следовало, не удовлетворяет требованию теории относительности, — оно не оставляет инвариантными интервалы между событиями.

Релятивистские же формулы преобразования мы будем искать исходя из требования, чтобы они оставляли интервалы инвариантными.

Как мы видели в § 2, интервал между двумя событиями можно рассматривать как расстояние между соответствующими двумя мировыми точками в четырехмерной системе координат. Мы можем, следовательно, сказать, что искомое преобразование должно оставлять неизменными все длины в четырехмерном пространстве x, y, z, ct. Но такими преобразованиями являются только параллельные переносы и вращения системы координат. Из них переносы системы координат параллельно самой себе не представляют интереса, так как сводятся просто к переносу начала пространственных координат и изменению момента на-

---

[1]) Предполагается, разумеется, что эти точки и соединяющие их линии таковы, что все элементы ds вдоль линий времениподобны.

Указанное свойство интеграла связано с псевдоевклидовостью четырехмерной геометрии. В евклидовом пространстве интеграл был бы, конечно, минимален вдоль прямой линии.

чала отсчета времени. Таким образом, искомое преобразование должно математически выражаться как вращение четырехмерной системы координат x, y, z, t.

Всякое вращение в четырехмерном пространстве можно разложить на шесть вращений, а именно в плоскостях xy, zy, xz, tx, ty, tz (подобно тому, как всякое вращение в обычном пространстве можно разложить на три вращения в плоскостях xy, zy и xz). Первые три из этих вращений преобразуют только пространственные координаты; они соответствуют обычным пространственным поворотам.

Рассмотрим поворот в плоскости tx; координаты y и z при этом не меняются. Это преобразование должно оставлять неизменной, в частности, разность $(ct)^2 - x^2$ — квадрат «расстояния» от точки (ct, x) до начала координат. Связь между старыми и новыми координатами в этом преобразовании дается в наиболее общем виде формулами

$$x = x' \operatorname{ch}\psi + ct' \operatorname{sh}\psi, \quad ct = x' \operatorname{sh}\psi + ct' \operatorname{ch}\psi, \tag{4,2}$$

где ψ — «угол поворота»; простой проверкой легко убедиться, что при этом действительно будет $c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2$. Формулы (4,2) отличаются от обычных формул преобразования при повороте осей координат заменой тригонометрических функций гиперболическими. В этом проявляется отличие псевдоевклидовой геометрии от евклидовой.

Мы ищем формулы преобразования от инерциальной системы отсчета K к системе K', которая движется относительно K со скоростью V вдоль оси x. При этом, очевидно, подвергаются преобразованию только координата x и время t. Поэтому это преобразование должно быть вида (4,2). Остается определить угол ψ, который может зависеть только от относительной скорости V[1]).

Рассмотрим движение в системе K начала координат системы отсчета K'. Тогда $x' = 0$ и формулы (4,2) принимают вид

$$x = ct' \operatorname{sh}\psi, \quad ct = ct' \operatorname{ch}\psi,$$

или, разделив одно на другое,

$$\frac{x}{ct} = \operatorname{th}\psi.$$

Но x/t есть, очевидно, скорость V системы K' относительно K. Таким обазом,

$$\operatorname{th}\psi = \frac{V}{c}.$$

---

[1]) Во избежание недоразумений заметим, что через V мы везде обозначаем постоянную относительную скорость двух инерциальных систем отсчета, а через v — скорость движущейся частицы, вовсе не обязанную быть постоянной.

Отсюда

$$\operatorname{sh}\psi=\frac{\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\quad \operatorname{ch}\psi=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Подставив это в (4,2), находим:

$$x=\frac{x'+Vt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\quad y=y',\quad z=z',\quad t=\frac{t'+\frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \qquad (4,3)$$

Это и есть искомые формулы преобразования. Они носят название формул *преобразования Лоренца* и имеют для дальнейшего фундаментальное значение.

Обратные формулы, выражающие x', y', z', t' через x, y, z, t, проще всего получаются заменой V на $-V$ (так как система K движется относительно K' со скоростью $-V$). Эти же формулы можно получить непосредственно, решая уравнения (4,3) относительно x', y', z', t'.

Легко видеть из (4,3), что при предельном переходе $c\to\infty$ к классической механике формулы преобразования Лоренца действительно переходят в преобразование Галилея.

При $V>c$ в формулах (4,3) координаты x, t делаются мнимыми; это соответствует тому факту, что движение со скоростью, большей скорости света, невозможно. Невозможно даже использование системы отсчета, движущейся со скоростью, равной скорости света, — при этом знаменатели в формулах (4,3) обратились бы в нуль.

Для скоростей V, малых по сравнению со скоростью света, вместо (4,3) можно пользоваться приближенными формулами

$$x=x'+Vt',\quad y=y',\quad z=z',\quad t=t'+\frac{V}{c^2}x'. \qquad (4,4)$$

Пусть в системе K покоится линейка, параллельная оси x. Длина ее, измеренная в этой системе, пусть будет $\Delta x=x_2-x_1$ (x_2 и x_1 — координаты обоих концов линейки в системе K). Найдем теперь длину этого стержня, измеренную в системе K'. Для этого надо найти координаты обоих концов стержня (x_2' и x_1') в этой системе в один и тот же момент времени t'. Из (4,3) находим:

$$x_1=\frac{x_1'+Vt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\quad x_2=\frac{x_2'+Vt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Длина стержня в системе K' есть $\Delta x' = x'_2 - x'_1$; вычитая x_2 из x_1, находим:

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Собственной длиной стержня называется его длина в той системе отсчета, в которой он покоится. Обозначим ее через $l_0 = \Delta x$, а длину того же стержня в какой-либо системе отсчета K' — через l. Тогда

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \tag{4,5}$$

Таким образом, самую большую длину стержень имеет в той системе отсчета, где он покоится. Длина его в системе, в которой он движется со скоростью V, уменьшается в отношении $\sqrt{1 - V^2/c^2}$. Этот результат теории относительности называется *лоренцевым сокращением.*

Поскольку поперечные размеры тела при его движении не меняются, то объем $\mathscr{V}$ тела сокращается по аналогичной формуле:

$$\mathscr{V} = \mathscr{V}_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}, \tag{4,6}$$

где $\mathscr{V}_0$ есть *собственный объем* тела.

Из преобразования Лоренца можно найти известные нам уже результаты относительно собственного времени (§ 3). Пусть в системе K' покоятся часы. В качестве двух событий возьмем два события, происшедших в одном и том же месте x', y', z' пространства в системе K'. Время в системе K' между этими событиями есть $\Delta t' = t'_2 - t'_1$. Найдем теперь время Δt, которое прошло между этими же событиями в системе отсчета K. Из (4,3) имеем:

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{V}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad t_2 = \frac{t'_2 + \frac{V}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

или, вычитая одно из другого,

$$t_2 - t_1 = \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

в полном согласии с (3,1).

Наконец, отметим еще одно общее свойство преобразований Лоренца, отличающее их от преобразований Галилея. Последние обладают, как говорят, свойством коммутативности, т. е. совместный результат двух последовательных преобразований

Галилея (с различными скоростями $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$) не зависит от порядка, в котором эти преобразования производятся. Напротив, результат двух последовательных преобразований Лоренца зависит, вообще говоря, от их последовательности. Чисто математически это видно уже из использованного выше формального истолкования этих преобразований как вращений четырехмерной системы координат: как известно, результат двух поворотов (вокруг различных осей) зависит от порядка их осуществления. Исключением являются лишь преобразования с параллельными векторами $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$ (эквивалентные поворотам четырехмерной системы координат вокруг одной и той же оси).

§ 5. Преобразование скорости

Мы нашли в предыдущем параграфе формулы, позволяющие по координатам события в одной системе отсчета найти координаты того же события в другой системе отсчета. Теперь мы найдем формулы, связывающие скорость движущейся материальной частицы в одной системе отсчета со скоростью той же частицы в другой системе.

Пусть опять система K' движется относительно системы K со скоростью V вдоль оси x. Пусть $v_x = dx/dt$ есть компонента скорости в системе K, а $v'_x = dx'/dt'$ — компонента скорости той же частицы в системе K'. Из (4,3) мы имеем:

$$dx = \frac{dx' + V\,dt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz', \quad dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2}dx'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Разделив первые три равенства на четвертое и введя скорости

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'},$$

находим:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1+\frac{v'_x V}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v'_y\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{v'_x V}{c^2}}, \quad v_z = \frac{v'_z\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{v'_x V}{c^2}}. \tag{5,1}$$

Эти формулы и определяют преобразование скоростей. Они представляют собой закон сложения скоростей в теории относительности. В предельном случае $c \to \infty$ они переходят в формулы классической механики $v_x = v'_x + V$, $v_y = v'_y$, $v_z = v'_z$.

В частном случае движения частицы параллельно оси x имеем $v_x = v$, $v_y = v_z = 0$. Тогда $v'_y = v'_z = 0$, а $v'_x = v'$, причем

$$v = \frac{v' + V}{1+\frac{v'V}{c^2}}. \tag{5,2}$$