Галилея (с различными скоростями $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$) не зависит от порядка, в котором эти преобразования производятся. Напротив, результат двух последовательных преобразований Лоренца зависит, вообще говоря, от их последовательности. Чисто математически это видно уже из использованного выше формального истолкования этих преобразований как вращений четырехмерной системы координат: как известно, результат двух поворотов (вокруг различных осей) зависит от порядка их осуществления. Исключением являются лишь преобразования с параллельными векторами $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$ (эквивалентные поворотам четырехмерной системы координат вокруг одной и той же оси).

§ 5. Преобразование скорости

Мы нашли в предыдущем параграфе формулы, позволяющие по координатам события в одной системе отсчета найти координаты того же события в другой системе отсчета. Теперь мы найдем формулы, связывающие скорость движущейся материальной частицы в одной системе отсчета со скоростью той же частицы в другой системе.

Пусть опять система K' движется относительно системы K со скоростью V вдоль оси x. Пусть $v_x = dx/dt$ есть компонента скорости в системе K, а $v'_x = dx'/dt'$ — компонента скорости той же частицы в системе K'. Из (4,3) мы имеем:

$$dx = \frac{dx' + V\,dt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz', \quad dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2}dx'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Разделив первые три равенства на четвертое и введя скорости

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'},$$

находим:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1+\frac{v'_x V}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v'_y\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{v'_x V}{c^2}}, \quad v_z = \frac{v'_z\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{v'_x V}{c^2}}. \tag{5,1}$$

Эти формулы и определяют преобразование скоростей. Они представляют собой закон сложения скоростей в теории относительности. В предельном случае $c \to \infty$ они переходят в формулы классической механики $v_x = v'_x + V$, $v_y = v'_y$, $v_z = v'_z$.

В частном случае движения частицы параллельно оси x имеем $v_x = v$, $v_y = v_z = 0$. Тогда $v'_y = v'_z = 0$, а $v'_x = v'$, причем

$$v = \frac{v' + V}{1+\frac{v'V}{c^2}}. \tag{5,2}$$

Легко убедиться в том, что сумма двух скоростей, меньших или равных скорости света, есть снова скорость, не бо́льшая скорости света.

Для скоростей V, значительно меньших скорости света (скорость v может быть любой), имеем приближенно с точностью до членов порядка V/c:

$$v_x = v'_x + V\left(1 - \frac{v'^2_x}{c^2}\right), \quad v_y = v'_y - v'_x v'_y \frac{V}{c^2}, \quad v_z = v'_z - v'_x v'_z \frac{V}{c^2}.$$

Эти три формулы можно записать в виде одной векторной формулы

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V} - \frac{1}{c^2}(\mathbf{V}\mathbf{v}')\mathbf{v}'. \tag{5,3}$$

Обратим внимание на то, что в релятивистский закон сложения скоростей (5,1) две складываемые скорости $\mathbf{v}'$ и $\mathbf{V}$ входят несимметричным образом (если только обе они не направлены вдоль оси x). Это обстоятельство естественным образом связано с упомянутой в предыдущем параграфе некоммутативностью преобразований Лоренца.

Выберем оси координат так, чтобы скорость частицы в данный момент лежала в плоскости xy. Тогда скорость частицы в системе K имеет компоненты $v_x = v\cos\theta$, $v_y = v\sin\theta$, а в системе K' имеем $v'_x = v'\cos\theta'$, $v'_y = v'\sin\theta'$ (v, v' и θ, θ' — абсолютные величины и углы, образованные скоростью с осями x и x' соответственно в системах K и K'). С помощью формул (5,1) находим тогда:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v'\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\sin\theta'}{v'\cos\theta' + V}. \tag{5,4}$$

Эта формула определяет изменение направления скорости при переходе от одной системы отсчета к другой.

Рассмотрим подробнее важный частный случай этой формулы, а именно отклонение света при переходе к другой системе отсчета, — явление, называемое *аберрацией* света. В этом случае $v = v' = c$ и предыдущая формула переходит в

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{\frac{V}{c} + \cos\theta'}\sin\theta'. \tag{5,5}$$

Из тех же формул преобразования (5,1) легко получить аналогичную зависимость для $\sin\theta$ и $\cos\theta$:

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c}\cos\theta'}\sin\theta', \quad \cos\theta = \frac{\cos\theta' + \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c}\cos\theta'}. \tag{5,6}$$

В случае $V \ll c$ находим из (5,6) с точностью до членов порядка V/c:

$$\sin\theta - \sin\theta' = -\frac{V}{c}\sin\theta'\cos\theta'.$$

Вводя угол $\Delta\theta = \theta' - \theta$ (угол аберрации), находим с той же точностью:

$$\Delta\theta = \frac{V}{c}\sin\theta', \tag{5,7}$$

т. е. известную элементарную формулу для аберрации света.

§ 6. Четырехмерные векторы

Совокупность координат события (ct, x, y, z) можно рассматривать как компоненты четырехмерного радиус-вектора (или, как мы будем говорить для краткости, 4-радиус-вектора) в четырехмерном пространстве. Его компоненты мы будем обозначать через x^i, где индекс i пробегает значения 0, 1, 2, 3, причем

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z.$$

Квадрат «длины» 4-радиус-вектора дается выражением

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2.$$

Он не меняется при любых поворотах четырехмерной системы координат, которыми являются, в частности, преобразования Лоренца.

Вообще *четырехмерным вектором* (4-вектором) A^i называется совокупность четырех величин A^0, A^1, A^2, A^3, которые при преобразованиях четырехмерной системы координат преобразуются как компоненты 4-радиус-вектора x^i. При преобразовании Лоренца

$$A^0 = \frac{A'^0 + \frac{V}{c}A'^1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad A^1 = \frac{A'^1 + \frac{V}{c}A'^0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad A^2 = A'^2, \quad A^3 = A'^3. \tag{6,1}$$

Квадрат величины всякого 4-вектора определяется аналогично квадрату 4-радиус-вектора:

$$(A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2.$$

Для удобства записи подобных выражений вводят два «сорта» компонент 4-векторов, обозначая их буквами A^i и A_i с индексами сверху и снизу. При этом

$$A_0 = A^0, \quad A_1 = -A^1, \quad A_2 = -A^2, \quad A_3 = -A^3. \tag{6,2}$$