В случае $V \ll c$ находим из (5,6) с точностью до членов порядка V/c:

$$\sin\theta - \sin\theta' = -\frac{V}{c}\sin\theta'\cos\theta'.$$

Вводя угол $\Delta\theta = \theta' - \theta$ (угол аберрации), находим с той же точностью:

$$\Delta\theta = \frac{V}{c}\sin\theta', \tag{5,7}$$

т. е. известную элементарную формулу для аберрации света.

§ 6. Четырехмерные векторы

Совокупность координат события (ct, x, y, z) можно рассматривать как компоненты четырехмерного радиус-вектора (или, как мы будем говорить для краткости, 4-радиус-вектора) в четырехмерном пространстве. Его компоненты мы будем обозначать через x^i, где индекс i пробегает значения 0, 1, 2, 3, причем

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z.$$

Квадрат «длины» 4-радиус-вектора дается выражением

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2.$$

Он не меняется при любых поворотах четырехмерной системы координат, которыми являются, в частности, преобразования Лоренца.

Вообще *четырехмерным вектором* (4-вектором) A^i называется совокупность четырех величин A^0, A^1, A^2, A^3, которые при преобразованиях четырехмерной системы координат преобразуются как компоненты 4-радиус-вектора x^i. При преобразовании Лоренца

$$A^0 = \frac{A'^0 + \frac{V}{c}A'^1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad A^1 = \frac{A'^1 + \frac{V}{c}A'^0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad A^2 = A'^2, \quad A^3 = A'^3. \tag{6,1}$$

Квадрат величины всякого 4-вектора определяется аналогично квадрату 4-радиус-вектора:

$$(A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2.$$

Для удобства записи подобных выражений вводят два «сорта» компонент 4-векторов, обозначая их буквами A^i и A_i с индексами сверху и снизу. При этом

$$A_0 = A^0, \quad A_1 = -A^1, \quad A_2 = -A^2, \quad A_3 = -A^3. \tag{6,2}$$

Величины A^i называют *контравариантными*, а A_i — *ковариантными* компонентами 4-вектора. Квадрат 4-вектора представится тогда в виде

$$\sum_{i=0}^{3} A^i A_i = A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3.$$

Такие суммы принято записывать просто как $A^i A_i$, опуская знак суммирования. Вообще принимается правило, согласно которому по всякому индексу, повторяющемуся в данном выражении дважды, подразумевается суммирование, а знак суммы опускается. При этом в каждой паре одинаковых индексов один должен стоять наверху, а другой внизу. Такой способ обозначения суммирования по, как говорят, *немым* индексам, очень удобен и значительно упрощает запись формул.

В этой книге мы будем обозначать четырехмерные индексы, пробегающие значения 0, 1, 2, 3, латинскими буквами i, k, l, ...

Аналогично квадрату 4-вектора составляется скалярное произведение двух разных 4-векторов:

$$A^i B_i = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3.$$

При этом, очевидно, его можно записать как в виде $A^i B_i$, так и в виде $A_i B^i$, — результат от этого не меняется. Вообще во всякой паре немых индексов всегда можно переставлять верхний и нижний индексы[1]).

Произведение $A^i B_i$ является 4-скаляром — оно инвариантно по отношению к поворотам четырехмерной системы координат. Это обстоятельство легко проверить непосредственно[2]), но оно и заранее очевидно (по аналогии с квадратом $A^i A_i$) из того, что все 4-векторы преобразуются по одинаковому закону.

Компоненту 4-вектора A^0 называют временной, а компоненты A^1, A^2, A^3 — пространственными (по аналогии с 4-радиус-вектором). Квадрат 4-вектора может быть положительным, отрицательным или равным нулю; в этих трех случаях говорят соответственно о *времениподобных*, *пространственноподобных* и

---

[1]) В современной литературе часто опускают вообще индексы у четырехмерных векторов, а их квадраты и скалярные произведения записывают просто как A^2, AB. В этой книге, однако, мы не будем пользоваться таким способом обозначений.

[2]) При этом надо помнить, что закон преобразования 4-вектора, выраженный через ковариантные компоненты, отличается (в знаках) от того же закона, выраженного в контравариантных компонентах. Так, вместо (6,1) будем, очевидно, иметь:

$$A_0 = \frac{A'_0 - \frac{V}{c} A'_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad A_1 = \frac{A'_1 - \frac{V}{c} A'_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad A_2 = A'_2, \; A_3 = A'_3.$$

нулевых 4-векторах (снова по аналогии с терминологией для интервалов)[1]).

По отношению к чисто пространственным поворотам (т. е. преобразованиям, не затрагивающим оси времени) три пространственные компоненты 4-вектора A^i составляют трехмерный вектор **A**. Временная же компонента 4-вектора представляет собой (по отношению к тем же преобразованиям) трехмерный скаляр. Перечисляя компоненты 4-вектора, мы часто будем записывать их как

$$A^i = (A^0, \mathbf{A}).$$

При этом ковариантные компоненты того же 4-вектора: $A_i = (A^0, -\mathbf{A})$, а квадрат 4-вектора: $A^iA_i = (A^0)^2 - \mathbf{A}^2$. Так, для 4-радиус-вектора:

$$x^i = (ct, \mathbf{r}), \quad x_i = (ct, -\mathbf{r}), \quad x^ix_i = c^2t^2 - \mathbf{r}^2.$$

У трехмерных векторов (в координатах x, y, z) нет, конечно, необходимости различать контра- и ковариантные компоненты. Везде (где это не сможет привести к недоразумениям) мы будем писать их компоненты A_α ($\alpha = x, y, z$) с индексами внизу, обозначая эти индексы греческими буквами. В частности, по дважды повторяющимся греческим индексам будет подразумеваться суммирование по трем значениям x, y, z (например, $\mathbf{AB} = A_\alpha B_\alpha$).

Четырехмерным тензором (4-тензором) 2-го ранга называется совокупность 16 величин A^{ik}, которые при преобразовании координат преобразуются как произведения компонент двух 4-векторов. Аналогичным образом определяются и 4-тензоры высших рангов.

Компоненты 4-тензора 2-го ранга могут быть представлены в трех видах: как контравариантные A^{ik}, ковариантные A_{ik} и смешанные $A^i{}_k$ (в последнем случае надо, вообще говоря, различать $A^i{}_k$ и $A_i{}^k$, т. е. следить за тем, какой именно — первый или второй — индекс стоит вверху, а какой внизу). Связь между различными видами компонент определяется по общему правилу: поднятие или опускание временного индекса (0) не меняет, а поднятие или опускание пространственного индекса (1, 2, 3) меняет знак компоненты. Так:

$$A_{00} = A^{00}, \quad A_{01} = -A^{01}, \quad A_{11} = A^{11}, \ldots,$$
$$A^0{}_0 = A^{00}, \quad A_0{}^1 = A^{01}, \quad A^0{}_1 = -A^{01}, \quad A^1{}_1 = -A^{11}, \ldots$$

По отношению к чисто пространственным преобразованиям девять компонент $A^{11}, A^{12}, \ldots$ составляют трехмерный тензор. Три компоненты A^{01}, A^{02}, A^{03} и три компоненты A^{10}, A^{20}, A^{30} составляют трехмерные векторы, а компонента A^{00} является трехмерным скаляром.

---

[1]) Нулевые 4-векторы называют также *изотропными*.

Тензор A^{ik} называется симметричным, если $A^{ik} = A^{ki}$, и антисимметричным, если $A^{ik} = -A^{ki}$. У антисимметричного тензора все диагональные компоненты (т. е. компоненты A^{00}, A^{11}, ...) равны нулю, так как, например, должно быть $A^{00} = -A^{00}$. У симметричного тензора A^{ik} смешанные компоненты $A^i{}_k$ и $A_k{}^i$ очевидно, совпадают; мы будем писать в таких случаях просто A^i_k, располагая индексы один над другим.

Во всяком тензорном равенстве выражения с обеих его сторон должны содержать одинаковые и одинаково расположенные (вверху или внизу) свободные, т. е. не немые, индексы. Свободные индексы в тензорных равенствах можно перемещать (вверх или вниз), но обязательно одновременно во всех членах уравнения. Приравнивание же контра- и ковариантных компонент различных тензоров «незаконно»; такое равенство, даже если бы оно случайно имело место в какой-либо системе отсчета, нарушилось бы при переходе к другой системе.

Из компонент тензора A^{ik} можно образовать скаляр путем образования суммы

$$A^i{}_i = A^0{}_0 + A^1{}_1 + A^2{}_2 + A^3{}_3$$

(при этом, конечно, $A^i{}_i = A_i{}^i$). Такую сумму называют *следом* тензора, а об операции его образования говорят как о *свертывании* или *упрощении* тензора.

Операцией свертывания является и рассмотренное выше образование скалярного произведения двух 4-векторов: это есть образование скаляра A^iB_i из тензора A^iB_k. Вообще всякое свертывание по паре индексов понижает ранг тензора на 2. Например, $A^i{}_{kli}$ есть тензор 2-го ранга, $A^i{}_kB^k$ — 4-вектор, $A^{ik}{}_{ik}$ — скаляр и т. д.

Единичным 4-тензором называется тензор δ^i_k, для которого имеет место равенство

$$\delta^k_i A^i = A^k \tag{6,3}$$

при любом 4-векторе A^i. Очевидно, что компоненты этого тензора равны

$$\delta^k_i = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i = k, \\ 0, & \text{если} \quad i \neq k. \end{cases} \tag{6,4}$$

Его след: $\delta^i_i = 4$.

Поднимая у тензора δ^k_i один или опуская другой индекс, мы получим контра- или ковариантный тензор, который обозначают как g^{ik} или g_{ik} и называют *метрическим тензором*. Тензоры g^{ik} и g_{ik} имеют одинаковые компоненты, которые можно

представить в виде таблицы:

$$(g^{ik}) = (g_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{6,5}$$

(индекс i нумерует строки, а индекс k — столбцы в порядке значений 0, 1, 2, 3). Очевидно, что

$$g_{ik}A^k = A_i, \quad g^{ik}A_k = A^i. \tag{6,6}$$

Скалярное произведение двух 4-векторов можно поэтому записать в виде

$$A^iA_i = g_{ik}A^iA^k = g^{ik}A_iA_k. \tag{6,7}$$

Тензоры δ^i_k, g_{ik}, g^{ik} исключительны в том отношении, что их компоненты одинаковы во всех системах координат. Таким же свойством обладает и совершенно антисимметричный единичный 4-тензор четвертого ранга e^{iklm}. Так называется тензор, компоненты которого меняют знак при перестановке любых двух индексов, причем отличные от нуля компоненты равны ± 1. Из антисимметричности следует, что все компоненты этого тензора, у которых хотя бы два индекса совпадают, равны нулю, так что отличны от нуля лишь те, у которых все четыре индекса различны. Положим

$$e^{0123} = +1 \tag{6,8}$$

(при этом $e_{0123} = -1$). Тогда все отличные от нуля компоненты e^{iklm} равны $+1$ или -1, смотря по тому, четным или нечетным числом перестановок (транспозиций) могут быть приведены числа i, k, l, m к последовательности 0, 1, 2, 3. Число таких компонент равно $4! = 24$. Поэтому

$$e^{iklm}e_{iklm} = -24. \tag{6,9}$$

По отношению к поворотам системы координат величины e^{iklm} ведут себя как компоненты тензора; однако при изменении знака у одной или трех координат компоненты e^{iklm}, будучи определены одинаково для всех систем координат, не изменяются, в то время как компоненты тензора должны были бы изменить знак. Поэтому e^{iklm} есть, собственно говоря, не тензор, а, как говорят, псевдотензор. *Псевдотензоры* любого ранга, в частности *псевдоскаляры*, ведут себя как тензоры при всех преобразованиях координат, за исключением тех, которые не могут быть сведены к поворотам, т. е. за исключением отражений — изменений знаков координат, не сводимых к вращениям.

Произведения $e^{iklm}e^{prst}$ образуют 4-тензор 8-го ранга, причем уже тензор истинный; упрощением по одной или нескольким парам индексов из него получаются тензоры 6-го, 4-го и 2-го рангов. Все эти тензоры имеют одинаковый вид во всех координатных системах. Поэтому их компоненты должны выражаться в виде комбинаций произведений компонент единичного тензора δ^i_k — единственного истинного тензора, компоненты которого во всех системах одинаковы. Эти комбинации легко составить, исходя из свойств симметрии по отношению к перестановкам индексов, которыми они должны обладать[1]).

Если A^{ik} — антисимметричный тензор, то тензор A^{ik} и псевдотензор $A^{*ik}=\frac{1}{2}e^{iklm}A_{lm}$ называются *дуальными* друг другу. Аналогично $e^{iklm}A_m$ есть антисимметричный псевдотензор 3-го ранга, дуальный вектору A^i. Произведение $A^{ik}A^*_{ik}$ дуальных тензоров есть, очевидно, псевдоскаляр.

В связи со сказанным напомним некоторые аналогичные свойства трехмерных векторов и тензоров. Совершенно антисимметричным единичным псевдотензором 3-го ранга называется совокупность величин $e_{\alpha\beta\gamma}$, меняющих знак при перестановке любых двух индексов. Отличны от нуля лишь компоненты $e_{\alpha\beta\gamma}$ с тремя различными индексами. При этом полагаем $e_{xyz}=1$; остальные же равны 1 или —1, смотря по тому, четным или нечетным числом транспозиций можно привести последовательность α, β, γ к последовательности x, y, z[2]).

---

[1]) Приведем здесь для справок соответствующие формулы:

$$e^{iklm}e_{prst}=-\begin{vmatrix}\delta^i_p & \delta^i_r & \delta^i_s & \delta^i_t\\ \delta^k_p & \delta^k_r & \delta^k_s & \delta^k_t\\ \delta^l_p & \delta^l_r & \delta^l_s & \delta^l_t\\ \delta^m_p & \delta^m_r & \delta^m_s & \delta^m_t\end{vmatrix},\quad e^{iklm}e_{prsm}=-\begin{vmatrix}\delta^i_p & \delta^i_r & \delta^i_s\\ \delta^k_p & \delta^k_r & \delta^k_s\\ \delta^l_p & \delta^l_r & \delta^l_s\end{vmatrix},$$

$$e^{iklm}e_{prlm}=-2\left(\delta^i_p\delta^k_r-\delta^i_r\delta^k_p\right),\quad e^{iklm}e_{pklm}=-6\delta^i_p.$$

Общие коэффициенты в этих формулах проверяются по результату полного свертывания, которое должно дать (6.9).

Как следствие первой из этих формул имеем:

$$e^{prst}A_{ip}A_{kr}A_{ls}A_{mt}=-Ae_{iklm},\quad e^{iklm}e^{prst}A_{ip}A_{kr}A_{ls}A_{mt}=24A,$$

где A — определитель, составленный из величин A_{ik}.

[2]) Неизменность компонент 4-тензора e^{iklm} по отношению к вращениям 4-системы координат и неизменность компонент 3-тензора $e_{\alpha\beta\gamma}$ по отношению к вращениям пространственных осей координат являются частными случаями общего правила: всякий совершенно антисимметричный тензор ранга, равного числу измерений пространства, в котором он определен, инвариантен при вращениях системы координат в этом пространстве.

Произведения $e_{\alpha\beta\gamma}e_{\lambda\mu\nu}$ составляют истинный трехмерный тензор 6-го ранга и потому выражаются в виде комбинаций произведений компонент единичного трехмерного тензора $\delta_{\alpha\beta}$ [1]).

При отражении системы координат, т. е. при изменении знака всех координат, компоненты обычного трехмерного вектора тоже меняют знак. Такие векторы называют *полярными*. Компоненты же вектора, который может быть представлен как векторное произведение двух полярных векторов, при отражении не меняют знак. Такие векторы называются *аксиальными*. Скалярное произведение полярного и аксиального векторов является не истинным, а псевдоскаляром: при отражении координат оно меняет знак. Аксиальный вектор является псевдовектором, дуальным антисимметричному тензору. Так, если $\mathbf{C} = [\mathbf{AB}]$, то

$$C_\alpha = \frac{1}{2} e_{\alpha\beta\gamma} C_{\beta\gamma}, \quad \text{где} \quad C_{\beta\gamma} = A_\beta B_\gamma - A_\gamma B_\beta.$$

Вернемся к 4-тензорам. Пространственные ($i, k, \ldots = 1, 2, 3$) компоненты антисимметричного 4-тензора A^{ik} составляют по отношению к чисто пространственным преобразованиям трехмерный антисимметричный тензор; согласно сказанному выше его компоненты выражаются через компоненты трехмерного аксиального вектора. Компоненты же A^{01}, A^{02}, A^{03} составляют, по отношению к тем же преобразованиям, трехмерный полярный вектор. Таким образом, компоненты антисимметричного 4-тензора можно представить в виде таблицы:

$$(A^{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & p_x & p_y & p_z \\ -p_x & 0 & -a_z & a_y \\ -p_y & a_z & 0 & -a_x \\ -p_z & -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix}, \tag{6,10}$$

причем по отношению к пространственным преобразованиям $\mathbf{p}$ и $\mathbf{a}$ — полярный и аксиальный векторы. Перечисляя компоненты антисимметричного 4-тензора, мы будем записывать их в виде

$$A^{ik} = (\mathbf{p}, \mathbf{a});$$

тогда ковариантные компоненты того же тензора

$$A_{ik} = (-\mathbf{p}, \mathbf{a}).$$

---

[1]) Приведем для справок соответствующие формулы:

$$e_{\alpha\beta\gamma}e_{\lambda\mu\nu} = \begin{vmatrix} \delta_{\alpha\lambda} & \delta_{\alpha\mu} & \delta_{\alpha\nu} \\ \delta_{\beta\lambda} & \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu} \\ \delta_{\gamma\lambda} & \delta_{\gamma\mu} & \delta_{\gamma\nu} \end{vmatrix}.$$

Упрощая этот тензор по одной, двум и трем парам индексов, получим:

$$e_{\alpha\beta\gamma}e_{\lambda\mu\gamma} = \delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\mu} - \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\lambda}, \quad e_{\alpha\beta\gamma}e_{\lambda\beta\gamma} = 2\delta_{\alpha\lambda}, \quad e_{\alpha\beta\gamma}e_{\alpha\beta\gamma} = 6.$$

Остановимся, наконец, на некоторых дифференциальных и интегральных операциях четырехмерного тензорного анализа.

4-градиент скаляра φ есть 4-вектор

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}=\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t},\ \nabla\varphi\right).$$

При этом необходимо иметь в виду, что написанные производные должны рассматриваться как ковариантные компоненты 4-вектора. Действительно, дифференциал скаляра

$$d\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}dx^i$$

тоже есть скаляр; из его вида (скалярное произведение двух 4-векторов) и очевидно сделанное утверждение.

Вообще операторы дифференцирования по координатам x^i, $\partial/\partial x^i$, должны рассматриваться как ковариантные компоненты операторного 4-вектора. Поэтому, например, является скаляром дивергенция 4-вектора — выражение $\partial A^i/\partial x^i$, в котором дифференцируются контравариантные компоненты A^i [1]).

В трехмерном пространстве интегрирование может производиться по объему, по поверхности и по кривой. В четырехмерном пространстве соответственно возможны четыре рода интегрирований.

1) Интеграл по кривой в 4-пространстве. Элементом интегрирования является элемент длины, т. е. 4-вектор dx^i.

---

[1]) Если же производить дифференцирования по «ковариантным координатам» x_i, то производные

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}=\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t},\ -\nabla\varphi\right)$$

составляют контравариантные компоненты 4-вектора. Мы будем пользоваться такой записью лишь в исключительных случаях $\left(\text{например, для записи квадрата 4-градиента } \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)$.

Упомянем, что в литературе часто используется краткая запись частных производных по координатам производных с помощью символов

$$\partial^i=\frac{\partial}{\partial x_i},\qquad \partial_i=\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

В этой форме записи операторов дифференцирования явно проявляется контра- или ковариантный характер образуемых с их помощью величин. Таким же преимуществом обладает и другой применяемый способ краткой записи производных — посредством индексов после запятой:

$$\varphi_{,i}=\frac{\partial\varphi}{\partial x^i},\qquad \varphi^{,i}=\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}.$$

2) Интеграл по поверхности (двумерной) в 4-пространстве. Как известно, в трехмерном пространстве проекции площади параллелограмма, построенного на двух векторах $d\mathbf{r}$ и $d\mathbf{r}'$, на координатные плоскости $x_\alpha x_\beta$ равны $dx_\alpha dx'_\beta - dx_\beta dx'_\alpha$. Аналогично в 4-пространстве бесконечно малый элемент поверхности определяется антисимметричным тензором второго ранга $df^{ik} = dx^i dx'^k - dx^k dx'^i$; его компоненты равны проекциям площади элемента на координатные плоскости. В трехмерном пространстве, как известно, вместо тензора $df_{\alpha\beta}$ в качестве элемента поверхности используется вектор df_α, дуальный тензору $df_{\alpha\beta}$: $df_\alpha = \frac{1}{2} e_{\alpha\beta\gamma} df_{\beta\gamma}$. Геометрически это есть вектор, нормальный к элементу поверхности и по абсолютной величине равный площади этого элемента. В четырехмерном пространстве такого вектора построить нельзя, но можно построить тензор df^{*ik}, дуальный тензору df^{ik}, т. е.

$$df^{*ik} = \frac{1}{2} e^{iklm} df_{lm}. \tag{6,11}$$

Геометрически он изображает элемент поверхности, равный и «нормальный» элементу df^{ik}; все лежащие на нем отрезки ортогональны ко всем отрезкам на элементе df^{ik}. Очевидно, что $df^{ik} df^*_{ik} = 0$.

3) Интеграл по гиперповерхности, т. е. по трехмерному многообразию. В трехмерном пространстве объем параллелепипеда, построенного на трех векторах, равен, как известно, определителю третьего порядка, составленному из компонент этих векторов. В 4-пространстве аналогичным образом выражаются проекции объема «параллелепипеда» (т .е. «площади» гиперповерхности), построенного на трех 4-векторах dx^i, dx'^i, dx''^i; они даются определителями

$$dS^{ikl} = \begin{vmatrix} dx^i & dx'^i & dx''^i \\ dx^k & dx'^k & dx''^k \\ dx^l & dx'^l & dx''^l \end{vmatrix},$$

составляющими тензор 3-ранга, антисимметричный по трем индексам. В качестве элемента интегрирования по гиперповерхности удобнее пользоваться 4-вектором dS^i, дуальным тензору dS^{ikl}:

$$dS^i = -\frac{1}{6} e^{iklm} dS_{klm}, \quad dS_{klm} = e_{nklm} dS^n. \tag{6,12}$$

При этом

$$dS^0 = dS^{123}, \quad dS^1 = dS^{023}, \ldots$$

Геометрически dS^i — 4-вектор, по величине равный «площади» элемента гиперповерхности и по направлению нормальный к этому элементу (т. е. перпендикулярный ко всем прямым, про-

веденным в элементе гиперповерхности). В частности, $dS^0 = dx\,dy\,dz$, т. е. представляет собой элемент трехмерного объема dV — проекцию элемента гиперповерхности на гиперплоскость $x^0 = \text{const}$.

4) Интеграл по четырехмерному объему; элементом интегрирования является произведение дифференциалов:

$$d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = c\,dt\,dV. \tag{6,13}$$

Этот элемент является скаляром: очевидно, что объем участка 4-пространства не меняется при повороте системы координат [1]).

Аналогично теоремам Гаусса и Стокса трехмерного векторного анализа существуют теоремы, позволяющие преобразовывать друг в друга четырехмерные интегралы.

Интеграл по замкнутой гиперповерхности можно преобразовать в интеграл по заключенному в ней 4-объему путем замены элемента интегрирования dS_i на оператор:

$$dS_i \to d\Omega \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{6,14}$$

Например, для интеграла от вектора A^i имеем:

$$\oint A^i dS_i = \int \frac{\partial A^i}{\partial x^i}\, d\Omega. \tag{6,15}$$

Эта формула является обобщением теоремы Гаусса.

Интеграл по двухмерной поверхности преобразуется в интеграл по «охватываемой» ею гиперповерхности заменой элемента интегрирования df^*_{ik} на оператор:

$$df^*_{ik} \to dS_i \frac{\partial}{\partial x^k} - dS_k \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{6,16}$$

Например, для интеграла от антисимметричного тензора A^{ik} имеем:

$$\frac{1}{2}\oint A^{ik} df^*_{ik} = \frac{1}{2}\int \left(dS_i \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k} - dS_k \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^i} \right) = \int dS_i \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k}. \tag{6,17}$$

---

[1]) При преобразовании переменных интегрирования x^0, x^1, x^2, x^3 к новым переменным x'^0, x'^1, x'^2, x'^3 элемент интегрирования $d\Omega$ заменяется, как известно, на $J\,d\Omega'$, где $d\Omega' = dx'^0\,dx'^1\,dx'^2\,dx'^3$, а

$$J = \frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}$$

— якобиан преобразования. Для линейного преобразования вида $x'^i = \alpha^i_k x^k$ якобиан J совпадает с определителем $|\alpha^i_k|$ и равен (для поворотов системы координат) единице; в этом и проявляется инвариантность $d\Omega$.

Интеграл по четырехмерной замкнутой линии преобразуется в интеграл по охватываемой ею поверхности путем замены

$$dx^i \to df^{ki}\frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{6,18}$$

Так, для интеграла от вектора имеем:

$$\oint A_i dx^i = \int df^{ki}\frac{\partial A_i}{\partial x^k} = \frac{1}{2}\int df^{ki}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right), \tag{6,19}$$

что является обобщением теоремы Стокса.

Задачи

1. Найти закон преобразования компонент симметричного 4-тензора A^{ik} при преобразовании Лоренца (6,1).

Решение. Рассматривая компоненты 4-тензора как произведения двух компонент 4-вектора, получим:

$$A^{00} = \frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}}\left(A'^{00} + 2\frac{V}{c}A'^{01} + \frac{V^2}{c^2}A'^{11}\right),$$

$$A^{11} = \frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}}\left(A'^{11} + 2\frac{V}{c}A'^{01} + \frac{V^2}{c^2}A'^{00}\right),$$

$$A^{22} = A'^{22}, \quad A^{23} = A'^{23}, \quad A^{12} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(A'^{12} + \frac{V}{c}A'^{02}\right),$$

$$A^{01} = \frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}}\left[A'^{01}\left(1+\frac{V^2}{c^2}\right) + \frac{V}{c}A'^{00} + \frac{V}{c}A'^{11}\right],$$

$$A^{02} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V_2}{c^2}}}\left(A'^{02} + \frac{V}{c}A'^{12}\right)$$

и аналогичные формулы для A^{33}, A^{13}, A^{03}.

2. То же для антисимметричного тензора A^{ik}.

Решение. Поскольку координаты x^2, x^3 не меняются, то не меняется и компонента тензора A^{23}, а компоненты A^{12}, A^{13} и A^{02}, A^{03} преобразуются как x^1 и x^0:

$$A^{23} = A'^{23}, \quad A^{12} = \frac{A'^{12} + \frac{V}{c}A'^{02}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad A^{02} = \frac{A'^{02} + \frac{V}{c}A'^{12}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

и аналогично для A^{13}, A^{03}.

По отношению к поворотам двухмерной системы координат в плоскости x^0x^1 (каковыми являются рассматриваемые преобразования) компоненты $A^{01} = -A^{10}$, $A^{00} = A^{11} = 0$ составляют антисимметричный тензор ранга, равного числу измерений пространства. Поэтому (см. примечание на стр. 35) при преобразованиях эти компоненты не меняются:

$$A^{01} = A'^{01}.$$