

§ 7. Четырехмерная скорость

Из обычного трехмерного вектора скорости можно образовать и четырехмерный вектор. Такой *четырехмерной скоростью* (4-скоростью) частицы является вектор

$$u^i = \frac{dx^i}{ds}. \quad (7.1)$$

Для нахождения его компонент замечаем, что согласно (3.1)

$$ds = c dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

где v — обычная трехмерная скорость частицы. Поэтому

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} = \frac{dx}{c dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v_x}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

и т. п. Таким образом:

$$u^i = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{v}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right). \quad (7.2)$$

Отметим, что 4-скорость есть величина безразмерная.

Компоненты 4-скорости не независимы. Замечая, что $dx_i dx^i = ds^2$, имеем:

$$u^i u_i = 1. \quad (7.3)$$

Геометрически u^i есть единичный 4-вектор касательной к мировой линии частицы.

Аналогично определению 4-скорости, вторую производную

$$w^i = \frac{d^2 x^i}{ds^2} = \frac{du^i}{ds}$$

можно назвать 4-ускорением. Дифференцируя соотношение (7.3), найдем:

$$u_i w^i = 0, \quad (7.4)$$

т. е. 4-векторы скорости и ускорения взаимно ортогональны.

Задача

Определить релятивистское равноускоренное движение, т. е. прямолинейное движение, при котором остается постоянной величина ускорения w в собственной (в каждый данный момент времени) системе отсчета.

Решение. В системе отсчета, в которой скорость частицы $v = 0$, компоненты 4-ускорения равны $w^i = (0, w/c^2, 0, 0)$ (w — обычное трехмерное ускорение, направленное вдоль оси x). Релятивистски инвариантное условие равноускоренности должно быть представлено в виде постоянства 4-скаляра, совпадающего с w^2 в собственной системе отсчета:

$$w^i w_i = \text{const} \equiv -\frac{w^2}{c^4}.$$

В «неподвижной» системе отсчета, относительно которой рассматривается движение, раскрытие выражения $w^i w_i$ приводит к уравнению

$$\frac{d}{dt} \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = w, \quad \text{или} \quad \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = wt + \text{const.}$$

Полагая $v = 0$ при $t = 0$, имеем const = 0, так что

$$v = \frac{wt}{\sqrt{1 + \frac{w^2 t^2}{c^2}}}.$$

Интегрируя еще раз и полагая $x = 0$ при $t = 0$, получим:

$$x = \frac{c^2}{w} \left(\sqrt{1 + \frac{w^2 t^2}{c^2}} - 1 \right).$$

При $wt \ll c$ эти формулы переходят в классические выражения $v = wt$, $x = wt^2/2$. При $wt \rightarrow \infty$ скорость стремится к постоянному значению c .

Собственное время равноускоренно движущейся частицыдается интегралом

$$\int_0^t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = \frac{c}{w} \operatorname{Arsh} \frac{wt}{c}.$$

При $t \rightarrow \infty$ оно растет по значительно более медленному чем t закону $\frac{c}{w} \ln \frac{2wt}{c}$.