ГЛАВА II

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА

§ 8. Принцип наименьшего действия

При исследовании движения материальных частиц мы будем исходить из принципа наименьшего действия. Этот принцип заключается в том, что для всякой механической системы существует такой интеграл S, называемый действием, который для действительного движения имеет минимум и вариация δS которого, следовательно, равна нулю[1]).

Определим интеграл действия для свободной материальной частицы, т. е. частицы, не находящейся под действием каких-либо внешних сил.

Для этого заметим, что этот интеграл не должен зависеть от выбора той или иной инерциальной системы отсчета, т. е. он должен быть инвариантом относительно преобразований Лоренца. Отсюда следует, что он должен быть взят от скаляра. Далее, ясно, что под интегралом должны стоять дифференциалы в первой степени. Однако единственный такой скаляр, который можно построить для свободной материальной частицы, есть интервал ds или $\alpha\, ds$, где α — некоторая постоянная.

Итак, действие для свободной частицы должно иметь вид

$$S = -\alpha \int_a^b ds,$$

где интеграл берется вдоль мировой линии между двумя заданными событиями a и b — нахождением частицы в начальном и конечном местах в определенные моменты времени t_1 и t_2, т. е. между заданными мировыми точками; α есть некоторая постоянная, характеризующая данную частицу. Легко видеть, что для всех частиц α должна быть положительной величиной. Действительно, мы видели в § 3, что интеграл $\int_a^b ds$ имеет максимальное значение вдоль прямой мировой линии; интегрируя вдоль кривой мировой линии, можно сделать его сколь угодно малым.

[1]) Строго говоря, принцип наименьшего действия утверждает, что интеграл S должен быть минимален лишь вдоль малых участков линии интегрирования. Для линий произвольной длины можно утверждать только, что S имеет экстремум, не обязательно являющийся минимумом (см. I § 2).

Таким образом, интеграл, взятый с положительным знаком, не может иметь минимума; взятый же с обратным знаком он имеет минимум — вдоль прямой мировой линии.

Действие можно представить в виде интеграла по времени:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt.$$

Коэффициент L при dt называется, как известно, *функцией Лагранжа* для данной механической системы. С помощью (3,1) находим:

$$S = -\int_{t_1}^{t_2} \alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,dt,$$

где v — скорость материальной частицы. Функция Лагранжа для частицы есть, следовательно,

$$L = -\alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Величина α, как уже отмечалось, характеризует данную частицу. В классической механике всякая частица характеризуется ее массой m. Определим связь величин α и m. Она находится из условия, что при предельном переходе $c \to \infty$ наше выражение для L должно перейти в классическое выражение

$$L = mv^2/2.$$

Для осуществления этого перехода разложим L в ряд по степеням v/c. Тогда, опуская члены высших порядков, получаем:

$$L = -\alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx -\alpha c + \frac{\alpha v^2}{2c}.$$

Постоянные члены в функции Лагранжа не отражаются на уравнениях движения и могут быть опущены. Опустив в L постоянную αc и сравнив с классическим выражением $L = mv^2/2$, найдем, что $\alpha = mc$.

Таким образом, действие для свободной материальной точки равно

$$S = -mc \int_a^b ds, \tag{8,1}$$

а функция Лагранжа

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{8,2}$$