

§ 9. Энергия и импульс

Импульсом частицы называется, как известно, вектор $\mathbf{p} = -\partial L/\partial \mathbf{v}$ ($\partial L/\partial \mathbf{v}$ — символическое обозначение вектора, компоненты которого равны производным от L по соответствующим компонентам \mathbf{v}). С помощью (8,2) находим:

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (9,1)$$

При малых скоростях ($v \ll c$) или в пределе при $c \rightarrow \infty$ это выражение переходит в классическое $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. При $v = c$ импульс обращается в бесконечность.

Производная от импульса по времени есть сила, действующая на частицу. Пусть скорость частицы изменяется только по направлению, т. е. сила направлена перпендикулярно скорости. Тогда

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (9,2)$$

Если же скорость меняется только по величине, т. е. сила направлена по скорости, то

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{m}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (9,3)$$

Мы видим, что в обоих случаях отношение силы к ускорению различно.

Энергией \mathcal{E} частицы называется величина

$$\mathcal{E} = \mathbf{p}\mathbf{v} - L$$

(см. I § 6). Подставляя выражение (8,2) и (9,1) для L и \mathbf{p} , получим:

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (9,4)$$

Эта очень важная формула показывает, в частности, что в релятивистской механике энергия свободной частицы не обращается в нуль при $v = 0$, а остается конечной величиной, равной

$$\mathcal{E} = mc^2. \quad (9,5)$$

Ее называют *энергией покоя* частицы.

При малых скоростях ($v \ll c$) имеем, разлагая (9,4) по степеням v/c :

$$\mathcal{E} \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2},$$

т. е. за вычетом энергии покоя классическое выражение для кинетической энергии частицы.

Подчеркнем, что хотя мы говорим здесь о «частице», но ее «элементарность» нигде не используется. Поэтому полученные формулы в равной степени применимы и к любому сложному телу, состоящему из многих частиц, причем под m надо понимать полную массу тела, а под v — скорость его движения как целого. В частности, формула (9,5) справедлива и для любого покоящегося как целое тела. Обратим внимание на то, что энергия свободного тела (т. е. энергия любой замкнутой системы) оказывается в релятивистской механике вполне определенной, всегда положительной величиной, непосредственно связанной с массой тела. Напомним в этой связи, что в классической механике энергия тела определена лишь с точностью до произвольной аддитивной постоянной, и может быть как положительной, так и отрицательной.

Энергия покоящегося тела содержит в себе, помимо энергий покоя входящих в его состав частиц, также кинетическую энергию частиц и энергию их взаимодействия друг с другом. Другими словами, mc^2 не равно сумме $\sum m_a c^2$ (m_a — массы частиц), а потому и m не равно $\sum m_a$. Таким образом, в релятивистской механике не имеет места закон сохранения массы: масса сложного тела не равна сумме масс его частей. Вместо этого имеет место только закон сохранения энергии, в которую включается также и энергия покоя частиц.

Возводя выражения (9,1) и (9,4) в квадрат и сравнивая их, найдем следующее соотношение между энергией и импульсом частицы:

$$\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} = p^2 + m^2 c^2. \quad (9,6)$$

Энергия, выраженная через импульс, называется, как известно, функцией Гамильтона \mathcal{H} :

$$\mathcal{H} = c \sqrt{p^2 + m^2 c^2}. \quad (9,7)$$

При малых скоростях $p \ll mc$ и приближенно

$$\mathcal{H} \approx mc^2 + \frac{p^2}{2m},$$

т. е. за вычетом энергии покоя получаем известное классическое выражение функции Гамильтона.

Из выражений (9,1) и (9,4) вытекает также следующее соотношение между энергией, импульсом и скоростью свободной частицы:

$$p = \frac{\mathcal{E} v}{c^2}. \quad (9,8)$$

При $v = c$ импульс и энергия частицы обращаются в бесконечность. Это значит, что частица с отличной от нуля массой m не может двигаться со скоростью света. В релятивистской механике, однако, могут существовать частицы с массой, равной нулю, движущиеся со скоростью света¹⁾. Из (9,8) имеем для таких частиц:

$$p = \frac{\mathcal{E}}{c}. \quad (9,9)$$

Приближенно такая же формула справедлива и для частиц с отличной от нуля массой в так называемом *ультрарелятивистском* случае, когда энергия частицы \mathcal{E} велика по сравнению с ее энергией покоя mc^2 .

Выведем теперь все полученные соотношения в четырехмерном виде. Согласно принципу наименьшего действия

$$\delta S = -mc\delta \int_a^b ds = 0.$$

Раскроем выражение для δS . Для этого замечаем, что $ds = \sqrt{dx_i dx^i}$ и потому

$$\delta S = -mc \int_a^b \frac{dx_i \delta dx^i}{ds} = -mc \int_a^b u_i d\delta x^i.$$

Интегрируя по частям, находим:

$$\delta S = -mcu_i \delta x^i \Big|_a^b + mc \int_a^b \delta x^i \frac{du_i}{ds} ds. \quad (9,10)$$

Как известно, для нахождения уравнений движения сравниваются различные траектории, проходящие через два заданных положения, т. е. на пределах $(\delta x^i)_a = (\delta x^i)_b = 0$. Истинная траектория определяется из условия $\delta S = 0$. Из (9,10) мы получили бы тогда уравнение $du_i/ds = 0$, т. е. постоянство скорости свободной частицы в четырехмерном виде.

Для того чтобы найти вариацию действия как функцию от координат, надо считать заданной лишь одну точку a , так что $(\delta x^i)_a = 0$. Вторую же точку надо считать переменной, но при этом рассматривать только истинные, т. е. удовлетворяющие уравнениям движения траектории. Поэтому интеграл в выражении (9,10) для δS равен нулю. Вместо $(\delta x^i)_b$ пишем просто δx^i и, таким образом, находим:

$$\delta S = -mcu_i \delta x^i. \quad (9,11)$$

¹⁾ Таковы световые кванты — фотоны, а также, возможно, нейтрино.

4- вектор

$$p_i = -\frac{\partial S}{\partial x^i} \quad (9,12)$$

называется 4-импульсом. Как известно из механики, производные $\partial S/\partial x$, $\partial S/\partial y$, $\partial S/\partial z$ — три компоненты вектора импульса частицы \mathbf{p} , а производная $\partial S/\partial t$ есть энергия частицы \mathcal{E} . Поэтому ковариантные компоненты 4-импульса, $p_i = (\mathcal{E}/c, -\mathbf{p})$, а контравариантные компоненты¹⁾

$$p^i = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \mathbf{p} \right). \quad (9,13)$$

Из (9,11) видно, что компоненты 4-импульса свободной частицы равны

$$p^i = mc u^i. \quad (9,14)$$

Подставив сюда компоненты 4-скорости из (7,2), убедимся в том, что для \mathbf{p} и \mathcal{E} действительно получаются выражения (9,1) и (9,4).

Таким образом, в релятивистской механике импульс и энергия являются компонентами одного 4-вектора. Отсюда непосредственно вытекают формулы преобразования импульса и энергии от одной инерциальной системы отсчета к другой. Подставив в общие формулы (6,1) преобразования 4-вектора выражения (9,13), находим:

$$p_x' = \frac{p_x + \frac{V}{c^2} \mathcal{E}'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad p_y' = p_y, \quad p_z' = p_z, \quad \mathcal{E}' = \frac{\mathcal{E}' + V p_x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (9,15)$$

где p_x , p_y , p_z — компоненты трехмерного вектора \mathbf{p} .

Из определения 4-импульса (9,14) и тождества $u^i u_i = 1$ имеем для квадрата 4-импульса свободной частицы:

$$p^i p_i = m^2 c^2. \quad (9,16)$$

Подставив сюда выражения (9,13), мы вернемся к соотношению (9,6).

По аналогии с обычным определением силы 4-вектор силы можно определить как производную:

$$g^i = \frac{dp^i}{ds} = mc \frac{du^i}{ds}. \quad (9,17)$$

Его компоненты удовлетворяют тождеству $g_i u^i = 0$. Компоненты этого 4-вектора выражаются через обычный трехмерный вектор

¹⁾ Обратим внимание на мнемоническое правило для запоминания определения физических 4-векторов: контравариантные компоненты связаны с соответствующими трехмерными векторами (i для x^i , \mathbf{p} для p^i и т. п.) с «правильным», положительным знаком.

силы $f = dp/dt$ согласно

$$g^i = \left(\frac{f v}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{f}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right). \quad (9.18)$$

Временная компонента оказывается связанный с работой силы.

Релятивистское уравнение Гамильтона — Якоби получается подстановкой в (9.16) производных $\partial S/\partial x^i$ вместо p_i :

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} \frac{\partial S}{\partial x^i} \equiv g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k} = m^2 c^2, \quad (9.19)$$

или, если написать сумму в явном виде:

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 = m^2 c^2. \quad (9.20)$$

Переход к предельному случаю классической механики в уравнении (9.20) совершается следующим образом. Прежде всего необходимо учесть, как и при соответствующем переходе в (9.7), что в релятивистской механике энергия частицы содержит член mc^2 , которого нет в классической механике. Поскольку действие S связано с энергией выражением $\mathcal{E} = -\partial S/\partial t$, то при переходе к классической механике надо вместо S ввести новое действие S' согласно соотношению

$$S = S' - mc^2 t.$$

Подставляя его в (9.20), находим:

$$\frac{1}{2mc^2} \left(\frac{\partial S'}{\partial t} \right)^2 - \frac{\partial S'}{\partial t} - \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial z} \right)^2 \right] = 0.$$

В пределе при $c \rightarrow \infty$ это уравнение переходит в известное классическое уравнение Гамильтона — Якоби.

§ 10. Преобразование функции распределения

В различных физических вопросах приходится иметь дело с пучками частиц, обладающих различными импульсами. Состав такого пучка, его импульсный спектр, характеризуется *функцией распределения* частиц по импульсам: $f(\mathbf{p})dp_x dp_y dp_z$ есть доля числа частиц, обладающих импульсами с компонентами в заданных интервалах dp_x , dp_y , dp_z (или, как говорят для краткости, число частиц в заданном элементе объема $d^3 p \equiv dp_x dp_y dp_z$ «импульсного пространства»). В связи с этим возникает вопрос о законе преобразования функции распределения $f(\mathbf{p})$ от одной системы отсчета к другой.

Для решения этого вопроса выясним предварительно свойства «элемента объема» $dp_x dp_y dp_z$ по отношению к преобразованию Лоренца. Если ввести четырехмерную систему координат,