силы $\mathbf{f} = d\mathbf{p}/dt$ согласно

$$g^i = \left(\frac{\mathbf{fv}}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \frac{\mathbf{f}}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right). \tag{9,18}$$

Временная компонента оказывается связанной с работой силы.

Релятивистское уравнение Гамильтона — Якоби получается подстановкой в (9,16) производных $-\partial S/\partial x^i$ вместо p_i:

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} \frac{\partial S}{\partial x^i} \equiv g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k} = m^2c^2, \tag{9,19}$$

или, если написать сумму в явном виде:

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 = m^2c^2. \tag{9,20}$$

Переход к предельному случаю классической механики в уравнении (9,20) совершается следующим образом. Прежде всего необходимо учесть, как и при соответствующем переходе в (9,7), что в релятивистской механике энергия частицы содержит член mc^2, которого нет в классической механике. Поскольку действие S связано с энергией выражением $\mathscr{E} = -\partial S/\partial t$, то при переходе к классической механике надо вместо S ввести новое действие S' согласно соотношению

$$S = S' - mc^2t.$$

Подставляя его в (9,20), находим:

$$\frac{1}{2mc^2} \left(\frac{\partial S'}{\partial t} \right)^2 - \frac{\partial S'}{\partial t} - \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial z} \right)^2 \right] = 0.$$

В пределе при $c \to \infty$ это уравнение переходит в известное классическое уравнение Гамильтона — Якоби.

§ 10. Преобразование функции распределения

В различных физических вопросах приходится иметь дело с пучками частиц, обладающих различными импульсами. Состав такого пучка, его импульсный спектр, характеризуется *функцией распределения* частиц по импульсам: $f(\mathbf{p})\,dp_x dp_y dp_z$ есть доля числа частиц, обладающих импульсами с компонентами в заданных интервалах dp_x, dp_y, dp_z (или, как говорят для краткости, число частиц в заданном элементе объема $d^3p \equiv dp_x dp_y dp_z$ «импульсного пространства»). В связи с этим возникает вопрос о законе преобразования функции распределения $f(\mathbf{p})$ от одной системы отсчета к другой.

Для решения этого вопроса выясним предварительно свойства «элемента объема» $dp_x dp_y dp_z$ по отношению к преобразованию Лоренца. Если ввести четырехмерную систему координат,

на осях которой откладываются четыре компоненты 4-импульса частицы, то $dp_x dp_y dp_z$ можно рассматривать как нулевую компоненту элемента гиперповерхности, определяемой уравнением $p^i p_i = m^2c^2$. Элемент гиперповерхности есть 4-вектор, направленный по нормали к ней; в данном случае направление нормали совпадает, очевидно, с направлением 4-вектора p_i. Отсюда следует, что отношение

$$\frac{dp_x\, dp_y\, dp_z}{\mathscr{E}}, \tag{10,1}$$

как отношение одинаковых компонент двух параллельных 4-векторов, есть величина инвариантная[1]).

Очевидным инвариантом является также доля числа частиц $f\, dp_x dp_y dp_z$, не зависящая от выбора системы отсчета. Написав ее в виде

$$f(\mathbf{p})\, \mathscr{E}\, \frac{dp_x\, dp_y\, dp_z}{\mathscr{E}}$$

и учитывая инвариантность отношения (10,1), мы приходим к выводу об инвариантности произведения $f(\mathbf{p})\mathscr{E}$. Отсюда следует, что функция распределения в системе K' связана с функцией распределения в системе K соотношением

$$f'(\mathbf{p}') = \frac{f(\mathbf{p})\,\mathscr{E}}{\mathscr{E}'}, \tag{10,2}$$

причем $\mathbf{p}$ и $\mathscr{E}$ должны быть выражены через $\mathbf{p}'$ и $\mathscr{E}'$ с помощью формул преобразования (9,15).

Вернемся к инвариантному выражению (10,1). Если ввести «сферические координаты» в импульсном пространстве, то элемент объема $dp_x dp_y dp_z$ заменится на $p^2\, dp\, do$, где do — элемент телесного угла для направлений вектора $\mathbf{p}$. Замечая, что $p\, dp = \mathscr{E} d\mathscr{E}/c^2$ (согласно (9,6)), имеем:

$$\frac{p^2\, dp\, do}{\mathscr{E}} = \frac{p\, d\mathscr{E}\, do}{c^2}.$$

---

[1]) Интегрирование по элементу (10,1) может быть представлено в четырехмерном виде с помощью δ-функции (см. примечание на стр. 100) как интегрирование по

$$\frac{2}{c}\,\delta(p^i p_i - m^2c^2)\, d^4p, \qquad d^4p = dp^0\, dp^1\, dp^2\, dp^3. \tag{10,1а}$$

При этом четыре компоненты p^i рассматриваются как независимые переменные (причем p^0 пробегает лишь положительные значения). Формула (10,1а) очевидна из следующего представления фигурирующей в ней δ-функции:

$$\delta(p^i p_i - m^2c^2) = \delta\left(p_0^2 - \frac{\mathscr{E}^2}{c^2}\right) = \frac{c}{2\mathscr{E}}\left[\delta\left(p_0 + \frac{\mathscr{E}}{c}\right) + \delta\left(p_0 - \frac{\mathscr{E}}{c}\right)\right], \tag{10,1б}$$

где $\mathscr{E} = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}$. В свою очередь эта формула следует из формулы (3), приведенной в примечании на стр. 100.

Таким образом, находим, что инвариантно также и выражение

$$p\,d\mathscr{E}\,do. \tag{10,3}$$

В другом аспекте понятие о функции распределения фигурирует в кинетической теории газов: произведение $f(\mathbf{r}, \mathbf{p})\,dp_x dp_y dp_z dV$ есть число частиц, находящихся в заданном элементе объема dV и обладающих импульсами в заданных интервалах dp_x, dp_y, dp_z. Функцию $f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ называют функцией распределения в *фазовом пространстве* (пространство координат и импульсов частицы), а произведение дифференциалов $d\tau = d^3p\,dV$ — элементом объема этого пространства. Выясним закон преобразования этой функции.

Введем наряду с двумя системами отсчета K и K' еще и систему K_0, в которой частицы с рассматриваемым импульсом покоятся; именно по отношению к этой системе определяется собственный объем dV_0 элемента, занимаемого данными частицами. Скорости систем K и K' относительно системы K_0 совпадают, по определению, со скоростями v и v', которыми обладают эти частицы в системах K и K'. Согласно (4,6) имеем поэтому:

$$dV = dV_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}, \quad dV' = dV_0\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}},$$

откуда

$$\frac{dV}{dV'} = \frac{\mathscr{E}'}{\mathscr{E}}.$$

Перемножив это равенство с равенством $d^3p/d^3p' = \mathscr{E}/\mathscr{E}'$, найдем, что

$$d\tau = d\tau', \tag{10,4}$$

т. е. элемент фазового объема инвариантен. Поскольку инвариантом является, по определению, также и число частиц $f\,d\tau$, то мы приходим к выводу об инвариантности функции распределения в фазовом пространстве:

$$f'(\mathbf{r}', \mathbf{p}') = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}), \tag{10,5}$$

где $\mathbf{r}'$, $\mathbf{p}'$ связаны с $\mathbf{r}$, $\mathbf{p}$ формулами преобразования Лоренца.

§ 11. Распад частиц

Рассмотрим самопроизвольный распад тела с массой M на две части с массами m_1 и m_2. Закон сохранения энергии при распаде, примененный в системе отсчета, в которой тело покоится, дает[1]):

$$M = \mathscr{E}_{10} + \mathscr{E}_{20}, \tag{11,1}$$

[1]) В § 11—13 полагаем $c = 1$. Другими словами, скорость света выбирается в качестве единицы измерения скоростей (при этом размерности длины и времени становятся одинаковыми). Такой выбор является естественным в релятивистской механике и очень упрощает запись формул. Однако