Таким образом, находим, что инвариантно также и выражение

$$p\,d\mathscr{E}\,do. \tag{10,3}$$

В другом аспекте понятие о функции распределения фигурирует в кинетической теории газов: произведение $f(\mathbf{r}, \mathbf{p})\,dp_x dp_y dp_z dV$ есть число частиц, находящихся в заданном элементе объема $dV$ и обладающих импульсами в заданных интервалах $dp_x$, $dp_y$, $dp_z$. Функцию $f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ называют функцией распределения в *фазовом пространстве* (пространство координат и импульсов частицы), а произведение дифференциалов $d\tau = d^3p\,dV$ — элементом объема этого пространства. Выясним закон преобразования этой функции.

Введем наряду с двумя системами отсчета $K$ и $K'$ еще и систему $K_0$, в которой частицы с рассматриваемым импульсом покоятся; именно по отношению к этой системе определяется собственный объем $dV_0$ элемента, занимаемого данными частицами. Скорости систем $K$ и $K'$ относительно системы $K_0$ совпадают, по определению, со скоростями $v$ и $v'$, которыми обладают эти частицы в системах $K$ и $K'$. Согласно (4,6) имеем поэтому:

$$dV = dV_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}, \quad dV' = dV_0\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}},$$

откуда

$$\frac{dV}{dV'} = \frac{\mathscr{E}'}{\mathscr{E}}.$$

Перемножив это равенство с равенством $d^3p/d^3p' = \mathscr{E}/\mathscr{E}'$, найдем, что

$$d\tau = d\tau', \tag{10,4}$$

т. е. элемент фазового объема инвариантен. Поскольку инвариантом является, по определению, также и число частиц $f\,d\tau$, то мы приходим к выводу об инвариантности функции распределения в фазовом пространстве:

$$f'(\mathbf{r}', \mathbf{p}') = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}), \tag{10,5}$$

где $\mathbf{r}'$, $\mathbf{p}'$ связаны с $\mathbf{r}$, $\mathbf{p}$ формулами преобразования Лоренца.

## § 11. Распад частиц

Рассмотрим самопроизвольный распад тела с массой $M$ на две части с массами $m_1$ и $m_2$. Закон сохранения энергии при распаде, примененный в системе отсчета, в которой тело покоится, дает[1]):

$$M = \mathscr{E}_{10} + \mathscr{E}_{20}, \tag{11,1}$$

[1]) В § 11—13 полагаем $c = 1$. Другими словами, скорость света выбирается в качестве единицы измерения скоростей (при этом размерности длины и времени становятся одинаковыми). Такой выбор является естественным в релятивистской механике и очень упрощает запись формул. Однако

где $\mathscr{E}_{10}$ и $\mathscr{E}_{20}$ — энергии разлетающихся частей. Поскольку $\mathscr{E}_{10} > m_1$ и $\mathscr{E}_{20} > m_2$, то равенство (11,1) может выполняться лишь, если $M > m_1 + m_2$, т. е. тело может самопроизвольно распадаться на части, сумма масс которых меньше массы тела. Напротив, если $M < m_1 + m_2$, то тело устойчиво (по отношению к данному распаду) и самопроизвольно не распадается. Для осуществления распада надо было бы в этом случае сообщить телу извне энергию, равную по крайней мере его «энергии связи» $(m_1 + m_2 - M)$.

Наряду с законом сохранения энергии при распаде должен выполняться законом сохранения импульса, т. е. сумма импульсов разлетающихся частей, как и первоначальный импульс тела, равна нулю: $\mathbf{p}_{10} + \mathbf{p}_{20} = 0$. Отсюда $p_{10}^2 = p_{20}^2$, или

$$\mathscr{E}_{10}^2 - m_1^2 = \mathscr{E}_{20}^2 - m_2^2. \tag{11,2}$$

Для уравнения (11,1) и (11,2) однозначно определяют энергии разлетающихся частей:

$$\mathscr{E}_{10} = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M}, \quad \mathscr{E}_{20} = \frac{M^2 - m_1^2 + m_2^2}{2M}. \tag{11,3}$$

В некотором смысле обратным является вопрос о вычислении суммарной энергии $M$ двух сталкивающихся частиц в системе отсчета, в которой их суммарный импульс равен нулю (или, как говорят для краткости, в *системе центра инерции* или в «*ц*-системе»). Вычисление этой величины дает критерий, определяющий возможность осуществления различных процессов неупругих столкновений, сопровождающихся изменением состояния сталкивающихся частиц или «рождением» новых частиц. Каждый такой процесс может происходить лишь при условии, что сумма масс всех «продуктов реакции» не превышает $M$.

Путь в исходной (или, как говорят, *лабораторной*) системе отсчета частица с массой $m_1$ и энергией $\mathscr{E}_1$ сталкивается с покоящейся частицей с массой $m_2$. Суммарная энергия обеих частиц

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 = \mathscr{E}_1 + m_2,$$

а суммарный импульс $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1$. Рассматривая обе частицы вместе как одну сложную систему, мы найдем скорость ее движения как целого согласно (9,8):

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{p}}{\mathscr{E}} = \frac{\mathbf{p}_1}{\mathscr{E}_1 + m_2}. \tag{11,4}$$

---

в этой книге (значительное место в которой уделено и нерелятивистской теории) мы, как правило, не будем пользоваться такой системой единиц, а при ее использовании будем каждый раз оговаривать это.

Если в формуле положено $c = 1$, то возвращение к обычным единицам не представляет труда: скорость света вводится в нее таким образом, чтобы обеспечить правильную размерность.

Это и есть скорость движения *ц*-системы относительно лабораторной системы (*л*-системы).

Однако для определения искомой массы $M$ нет необходимости фактически производить преобразование от одной системы отсчета к другой. Вместо этого можно непосредственно воспользоваться формулой (9,6), применимой к составной системе в такой же мере, как и к каждой частице в отдельности. Таким образом, имеем:

$$M^2 = \mathscr{E}^2 - p^2 = (\mathscr{E}_1 + m_2)^2 - (\mathscr{E}_1^2 - m_1^2),$$

откуда

$$M^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2m_2\mathscr{E}_1. \tag{11,5}$$

**Задачи**

1. Частица, движущаяся со скоростью $V$, распадается «на лету» на две частицы. Определить связь между углами вылета последних и их энергиями.

Решение. Пусть $\mathscr{E}_0$ — энергия одной из распадных частиц в *ц*-системе (т.е. $\mathscr{E}_{10}$ или $\mathscr{E}_{20}$ из (11.3)), $\mathscr{E}$ — энергия этой же частицы в *л*-системе, а $\theta$ — угол ее вылета в *л*-системе (по отношению к направлению $\mathbf{V}$). С помощью формул преобразования (9,15) имеем:

$$\mathscr{E}_0 = \frac{\mathscr{E} - Vp\cos\theta}{\sqrt{1-V^2}},$$

откуда

$$\cos\theta = \frac{\mathscr{E} - \mathscr{E}_0\sqrt{1-V^2}}{V\sqrt{\mathscr{E}^2 - m^2}}. \tag{1}$$

Для обратного определения $\mathscr{E}$ по $\cos\theta$ отсюда получается квадратное (относительно $\mathscr{E}$) уравнение

$$\mathscr{E}^2\left(1 - V^2\cos^2\theta\right) - 2\mathscr{E}\mathscr{E}_0\sqrt{1-V^2} + \mathscr{E}_0^2\left(1-V^2\right) + V^2m^2\cos^2\theta = 0, \tag{2}$$

имеющее один (если скорость распадной частицы в *ц*-системе $v_0 > V$) или два (если $v_0 < V$) положительных корня.

Происхождение последней двузначности ясно из следующего графического построения. Согласно формулам (9,15) компонента импульса в *л*-системе выражается через величины, относящиеся к *ц*-системе, следующим образом:

$$p_x = \frac{p_0\cos\theta_0 + \mathscr{E}_0 V}{\sqrt{1-V^2}}, \qquad p_y = p_0\sin\theta_0.$$

Исключая отсюда $\theta_0$, получим:

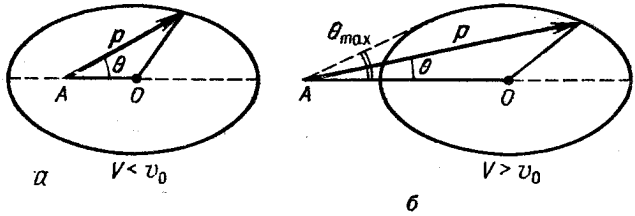
$$p_y^2 + \left(p_x\sqrt{1-V^2} - \mathscr{E}_0 V\right)^2 = p_0^2.$$

По отношению к переменным $p_x$, $p_y$ это есть уравнение эллипса с полуосями $p_0/\sqrt{1-V^2}$, $p_0$ и центром (точка $O$ на рис. 3), смещенным на расстояние $\mathscr{E}_0 V/\sqrt{1-V^2}$ от точки $\mathbf{p} = 0$ (точка $A$ на рис. 3) [1]).

---

[1]) В классическом пределе эллипс превращается в окружность (см. I § 16).

Если $V > p_0/\mathscr{E}_0 = v_0$, то точка $A$ лежит вне эллипса (рис. 3, *б*) и при заданном угле $\theta$ вектор $\mathbf{p}$ (а с ним и энергия $\mathscr{E}$) может иметь два различных значения. Из построения видно также, что в этом случае угол $\theta$ может принимать лишь значения, не превышающие определенного $\theta_{max}$ (отвечающего такому положению вектора $\mathbf{p}$, при котором он касателен к эллипсу). Значение $\theta_{max}$ проще всего определяется аналитически из условия




*а* $V < v_0$ $V > v_0$ *б*

Рис. 3

обращения в нуль дискриминанта квадратного уравнения (2) и оказывается равным:

$$\sin\theta_{max} = \frac{p_0\sqrt{1-V^2}}{mV}.$$

2. Найти распределение распадных частиц по энергиям в *л*-системе.

Решение. В *ц*-системе распадные частицы распределены изотропно по направлениям, т. е. доля числа частиц в элементе телесного угла $do_0 = 2\pi\sin\theta_0\,d\theta_0$ есть

$$dN = \frac{1}{4\pi}\,do_0 = \frac{1}{2}\,|\,d\cos\theta_0\,|. \qquad (1)$$

Энергия в *л*-системе связана с величинами, относящимися к *ц*-системе, соотношением

$$\mathscr{E} = \frac{\mathscr{E}_0 + p_0V\cos\theta_0}{\sqrt{1-V^2}},$$

и пробегает значения между

$$\frac{\mathscr{E}_0 - Vp_0}{\sqrt{1-V^2}} \quad \text{и} \quad \frac{\mathscr{E}_0 + Vp_0}{\sqrt{1-V^2}}.$$

Выражая $|d\cos\theta_0|$ через $d\mathscr{E}$, получим нормированное на единицу распределение по энергиям (для каждого из двух сортов распадных частиц):

$$dN = \frac{1}{2Vp_0}\sqrt{1-V^2}\,d\mathscr{E}.$$

3. Определить интервал значений, которые может принимать в *л*-системе угол между двумя распадными частицами (угол разлета) при распаде на две одинаковые частицы.

Решение. В *ц*-системе частицы разлетаются во взаимно противоположных направлениях, так что $\theta_{10} = \pi - \theta_{20} \equiv \theta_0$. Связь между углами в *ц*- и *л*-системах дается согласно (5,4) формулами

$$\operatorname{ctg}\theta_1 = \frac{v_0\cos\theta_0 + V}{v_0\sin\theta_0\sqrt{1-V^2}}, \qquad \operatorname{ctg}\theta_2 = \frac{-v_0\cos\theta_0 + V}{v_0\sin\theta_0\sqrt{1-V^2}}$$

(в данном случае $v_{10} = v_{20} \equiv v_0$). Искомый угол разлета $\Theta = \theta_1 + \theta_2$ и для него простое вычисление дает:

$$\operatorname{ctg}\Theta = \frac{V^2 - v_0^2 + V^2 v_0^2 \sin^2\theta_0}{2Vv_0\sqrt{1-V^2}\sin\theta_0}.$$

Исследование экстремумов этого выражения приводит к следующим интервалам возможных значений $\Theta$:

если $V < v_0$: $2\operatorname{arctg}\left(\frac{v_0}{V}\sqrt{1-V^2}\right) < \Theta < \pi$;

если $v_0 < V < \frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}}$: $0 < \Theta < \arcsin\sqrt{\frac{1-V^2}{1-v_0^2}} < \frac{\pi}{2}$;

если $V > \frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}}$: $0 < \Theta < 2\operatorname{arctg}\left(\frac{v_0}{V}\sqrt{1-V^2}\right) < \frac{\pi}{2}$.

4. Найти угловое распределение в *л*-системе для распадных частиц с массой, равной нулю.

Решение. Связь между углами вылета в *ц*- и *л*-системах для частицы с $m = 0$ дается согласно (5,6) формулой

$$\cos\theta_0 = \frac{\cos\theta - V}{1 - V\cos\theta}.$$

Подставляя это выражение в формулу (1) задачи 2, получим:

$$dN = \frac{(1-V^2)\,do}{4\pi(1-V\cos\theta)^2}.$$

5. Найти распределение по углам разлета в *л*-системе при распаде на две частицы с массами, равными нулю.

Решение. Связь между углами вылета $\theta_1$, $\theta_2$ в *л*-системе и углами $\theta_{10} \equiv \theta_0$, $\theta_{20} = \pi - \theta_0$ в *ц*-системе определяется по формулам (5,6), после чего для угла разлета $\Theta = \theta_1 + \theta_2$ находим:

$$\cos\Theta = \frac{2V^2 - 1 - V^2\cos^2\theta_0}{1 - V^2\cos^2\theta_0}$$

и обратно:

$$\cos\theta_0 = \sqrt{1 - \frac{1-V^2}{V^2}\operatorname{ctg}^2\frac{\Theta}{2}}.$$

Подставив это выражение в формулу (1) задачи 2, получим:

$$dN = \frac{1-V^2}{16\pi V}\,\frac{do}{\sin^3\frac{\Theta}{2}\sqrt{V^2 - \cos^2\frac{\Theta}{2}}}.$$

Угол $\Theta$ пробегает значения от $\pi$ до $\Theta_{\min} = 2\arccos V$.

6. Определить наибольшую энергию, которую может унести одна из распадных частиц при распаде неподвижной частицы с массой $M$ на три частицы $m_1$, $m_2$, $m_3$.

Решение. Частица $m_1$ имеет наибольшую энергию, если система двух остальных частиц $m_2$ и $m_3$ имеет наименьшую возможную массу; последняя

равна сумме $m_2 + m_3$ (чему отвечает совместное движение этих частиц с одинаковой скоростью). Сведя, таким образом, вопрос к распаду тела на две части, получим согласно (11,3):

$$\mathscr{E}_{1\,\max} = \frac{M^2 + m_1^2 - (m_2 + m_3)^2}{2M}.$$

## § 12. Инвариантное сечение

Как известно, различные процессы рассеяния характеризуются их *эффективными сечениями* (или просто *сечениями*), определяющими числа столкновений, происходящих в пучках сталкивающихся частиц.

Пусть мы имеем два сталкивающихся пучка; обозначим через $n_1$ и $n_2$ плотности частиц в них (т. е. числа частиц в единице объема), а через $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ — скорости частиц. В системе отсчета, в которой частицы *2* покоятся (или, как говорят короче, в *системе покоя* частиц 2), мы имеем дело со столкновением пучка частиц *1* с неподвижной мишенью. При этом, согласно обычному определению сечения $\sigma$, число столкновений, происходящих в объеме $dV$ в течение времени $dt$, равно

$$d\nu = \sigma v_{\text{отн}} n_1 n_2\, dV\, dt,$$

где $v_{\text{отн}}$ — величина скорости частиц *1* в системе покоя частиц *2* (именно так определяется в релятивистской механике относительная скорость двух частиц).

Число $d\nu$ по самому своему существу есть величина инвариантная. Поставим себе целью выразить ее в виде, пригодном в любой системе отсчета:

$$d\nu = A n_1 n_2\, dV\, dt, \tag{12,1}$$

где $A$ — подлежащая определению величина, о которой известно, что в системе покоя одной из частиц она равна $v_{\text{отн}}\sigma$. При этом мы будем всегда понимать $\sigma$ именно как сечение в системе покоя одной из частиц, т. е., по определению, как величину инвариантную. По определению, инвариантной является и относительная скорость $v_{\text{отн}}$.

В выражении (12,1) произведение $dV\,dt$ есть величина инвариантная. Поэтому должно быть инвариантным и произведение $An_1n_2$.

Закон преобразования плотности частиц $n$ легко найти, заметив, что инвариантно число частиц $ndV$ в заданном элементе объема $dV$. Написав $n\,dV = n_0\,dV_0$ (индекс 0 указывает систему покоя частиц) и воспользовавшись формулой (4,6) для преобразования объема, найдем:

$$n = \frac{n_0}{\sqrt{1 - v^2}}, \tag{12,2}$$

или $n = n_0\mathscr{E}/m$, где $\mathscr{E}$ — энергия, а $m$ — масса частиц.