равна сумме $m_2 + m_3$ (чему отвечает совместное движение этих частиц с одинаковой скоростью). Сведя, таким образом, вопрос к распаду тела на две части, получим согласно (11,3):

$$\mathscr{E}_{1\,\max} = \frac{M^2 + m_1^2 - (m_2 + m_3)^2}{2M}.$$

§ 12. Инвариантное сечение

Как известно, различные процессы рассеяния характеризуются их *эффективными сечениями* (или просто *сечениями*), определяющими числа столкновений, происходящих в пучках сталкивающихся частиц.

Пусть мы имеем два сталкивающихся пучка; обозначим через n_1 и n_2 плотности частиц в них (т. е. числа частиц в единице объема), а через $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ — скорости частиц. В системе отсчета, в которой частицы *2* покоятся (или, как говорят короче, в *системе покоя* частиц 2), мы имеем дело со столкновением пучка частиц *1* с неподвижной мишенью. При этом, согласно обычному определению сечения σ, число столкновений, происходящих в объеме dV в течение времени dt, равно

$$d\nu = \sigma v_{\text{отн}} n_1 n_2\, dV\, dt,$$

где $v_{\text{отн}}$ — величина скорости частиц *1* в системе покоя частиц *2* (именно так определяется в релятивистской механике относительная скорость двух частиц).

Число $d\nu$ по самому своему существу есть величина инвариантная. Поставим себе целью выразить ее в виде, пригодном в любой системе отсчета:

$$d\nu = A n_1 n_2\, dV\, dt, \tag{12,1}$$

где A — подлежащая определению величина, о которой известно, что в системе покоя одной из частиц она равна $v_{\text{отн}}\sigma$. При этом мы будем всегда понимать σ именно как сечение в системе покоя одной из частиц, т. е., по определению, как величину инвариантную. По определению, инвариантной является и относительная скорость $v_{\text{отн}}$.

В выражении (12,1) произведение $dV\,dt$ есть величина инвариантная. Поэтому должно быть инвариантным и произведение An_1n_2.

Закон преобразования плотности частиц n легко найти, заметив, что инвариантно число частиц ndV в заданном элементе объема dV. Написав $n\,dV = n_0\,dV_0$ (индекс 0 указывает систему покоя частиц) и воспользовавшись формулой (4,6) для преобразования объема, найдем:

$$n = \frac{n_0}{\sqrt{1 - v^2}}, \tag{12,2}$$

или $n = n_0\mathscr{E}/m$, где $\mathscr{E}$ — энергия, а m — масса частиц.

Поэтому утверждение об инвариантности произведения An_1n_2 эквивалентно инвариантности выражения $A\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2$. Более удобно представить это условие в виде

$$A\frac{\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2}{p_{1i}p_2^i}=A\frac{\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2}{\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2-\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}=\mathrm{inv}, \tag{12,3}$$

где в знаменателе стоит тоже инвариантная величина — произведение 4-импульсов обеих частиц.

В системе покоя частиц *2* имеем $\mathscr{E}_2=m_2$, $\mathbf{p}_2=0$, так что инвариантная величина (12,3) сводится к A. С другой стороны, в этой системе $A=\sigma v_{\text{отн}}$. Таким образом, в произвольной системе отсчета

$$A=\sigma v_{\text{отн}}\frac{p_{1i}p_2^i}{\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2}. \tag{12,4}$$

Для придания этому выражению окончательного вида, выразим $v_{\text{отн}}$ через импульсы или скорости частиц в произвольной системе отсчета. Для этого замечаем, что в системе покоя частиц *2* инвариант

$$p_{1i}p_2^i=\frac{m_1}{\sqrt{1-v_{\text{отн}}^2}}m_2.$$

Отсюда

$$v_{\text{отн}}=\sqrt{1-\frac{m_1^2m_2^2}{(p_{1i}p_2^i)^2}}. \tag{12,5}$$

Выразив величину $p_{1i}p_2^i=\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2-\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2$ через скорости $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ с помощью (9,1) и (9,4):

$$p_{1i}p_2^i=m_1m_2\frac{1-\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2}{\sqrt{(1-v_1^2)(1-v_2^2)}}$$

и подставив в (12,5), после простых преобразований получим следующее выражение для относительной скорости:

$$v_{\text{отн}}=\frac{\sqrt{(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)^2-[\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2]^2}}{1-\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2} \tag{12,6}$$

(обратим внимание на то, что это выражение симметрично по $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$, т. е. величина относительной скорости не зависит от того, по отношению к которой из частиц она определяется).

Подставив (12,5) или (12,6) в (12,4), а затем в (12,1), получим окончательные формулы, решающие поставленный вопрос:

$$d\nu=\sigma\frac{\sqrt{(p_{1i}p_2^i)^2-m_1^2m_2^2}}{\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2}n_1n_2\,dV\,dt \tag{12,7}$$

или

$$d\nu = \sigma\sqrt{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 - [\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2]^2}\, n_1 n_2\, dV\, dt \tag{12,8}$$

(*W. Pauli*, 1933).

Если скорости $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ лежат вдоль одной прямой, то $[\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2] = 0$, так что формула (12,8) принимает вид

$$d\nu = \sigma\,|\,\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\,|\, n_1 n_2\, dV\, dt. \tag{12,9}$$

Задача

Найти «элемент длины» в релятивистском «пространстве скоростей».

Решение. Искомый «элемент длины» dl_v представляет собой относительную скорость двух точек со скоростями $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$. Поэтому из (12,6) находим:

$$dl_v^2 = \frac{(d\mathbf{v})^2 - [\mathbf{v}\, d\mathbf{v}]^2}{(1 - v^2)^2} = \frac{dv^2}{(1 - v^2)^2} + \frac{v^2}{(1 - v^2)}\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right),$$

где θ, φ — полярный угол и азимут направления $\mathbf{v}$. Если ввести вместо v новую переменную χ согласно равенству $v = \operatorname{th}\chi$, то элемент длины представится в виде

$$dl_v^2 = d\chi^2 + \operatorname{sh}^2\chi\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right).$$

С геометрической точки зрения, это есть элемент длины в трехмерном пространстве Лобачевского — пространстве постоянной отрицательной кривизны (ср. (111,12)).

§ 13. Упругие столкновения частиц

Рассмотрим, с точки зрения релятивистской механики, *упругое столкновение* частиц. Обозначим импульсы и энергии двух сталкивающихся частиц (с массами m_1 и m_2) через $\mathbf{p}_1$, $\mathscr{E}_1$ и $\mathbf{p}_2$, $\mathscr{E}_2$; значения величин после столкновения будем отмечать штрихом.

Законы сохранения энергии и импульса при столкновении можно записать вместе в виде уравнения сохранения 4-импульса:

$$p_1^i + p_2^i = p_1'^i + p_2'^i. \tag{13,1}$$

Составим из этого 4-векторного уравнения инвариантные соотношения, которые будут удобными для дальнейших вычислений. Для этого перепишем (13,1) в виде

$$p_1^i + p_2^i - p_1'^i = p_2'^i$$

и возведем обе стороны равенства в квадрат (т. е. напишем их скалярные произведения самих на себя). Замечая, что квадраты 4-импульсов p_1^i и $p_1'^i$ равны m_1^2, а квадраты p_2^i и $p_2'^i$ равны m_2^2, получим:

$$m_1^2 + p_{1i}p_2^i - p_{1i}p_1'^i - p_{2i}p_1'^i = 0. \tag{13,2}$$