или

$$d\nu = \sigma\sqrt{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 - [\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2]^2}\, n_1 n_2\, dV\, dt \tag{12,8}$$

(*W. Pauli*, 1933).

Если скорости $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ лежат вдоль одной прямой, то $[\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2] = 0$, так что формула (12,8) принимает вид

$$d\nu = \sigma\,|\,\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\,|\, n_1 n_2\, dV\, dt. \tag{12,9}$$

Задача

Найти «элемент длины» в релятивистском «пространстве скоростей».

Решение. Искомый «элемент длины» dl_v представляет собой относительную скорость двух точек со скоростями $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$. Поэтому из (12,6) находим:

$$dl_v^2 = \frac{(d\mathbf{v})^2 - [\mathbf{v}\, d\mathbf{v}]^2}{(1 - v^2)^2} = \frac{dv^2}{(1 - v^2)^2} + \frac{v^2}{(1 - v^2)}\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right),$$

где θ, φ — полярный угол и азимут направления $\mathbf{v}$. Если ввести вместо v новую переменную χ согласно равенству $v = \operatorname{th}\chi$, то элемент длины представится в виде

$$dl_v^2 = d\chi^2 + \operatorname{sh}^2\chi\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right).$$

С геометрической точки зрения, это есть элемент длины в трехмерном пространстве Лобачевского — пространстве постоянной отрицательной кривизны (ср. (111,12)).

§ 13. Упругие столкновения частиц

Рассмотрим, с точки зрения релятивистской механики, *упругое столкновение* частиц. Обозначим импульсы и энергии двух сталкивающихся частиц (с массами m_1 и m_2) через $\mathbf{p}_1$, $\mathscr{E}_1$ и $\mathbf{p}_2$, $\mathscr{E}_2$; значения величин после столкновения будем отмечать штрихом.

Законы сохранения энергии и импульса при столкновении можно записать вместе в виде уравнения сохранения 4-импульса:

$$p_1^i + p_2^i = p_1'^i + p_2'^i. \tag{13,1}$$

Составим из этого 4-векторного уравнения инвариантные соотношения, которые будут удобными для дальнейших вычислений. Для этого перепишем (13,1) в виде

$$p_1^i + p_2^i - p_1'^i = p_2'^i$$

и возведем обе стороны равенства в квадрат (т. е. напишем их скалярные произведения самих на себя). Замечая, что квадраты 4-импульсов p_1^i и $p_1'^i$ равны m_1^2, а квадраты p_2^i и $p_2'^i$ равны m_2^2, получим:

$$m_1^2 + p_{1i}p_2^i - p_{1i}p_1'^i - p_{2i}p_1'^i = 0. \tag{13,2}$$

Аналогичным образом, возведя в квадрат равенство $p_1^i + p_2^i - p_2'^i = p_1'^i$, получим:

$$m_2^2 + p_{1i}p_2^i - p_{2i}p_2'^i - p_{1i}p_2'^i = 0. \tag{13,3}$$

Рассмотрим столкновение в системе отсчета ($л$-система), в которой до столкновения одна из частиц (частица m_2) покоилась. Тогда $\mathbf{p}_2 = 0$, $\mathscr{E}_2 = m_2$ и фигурирующие в (13,2) скалярные произведения равны

$$\begin{gathered} p_{1i}p_2^i = \mathscr{E}_1 m_2, \quad p_{2i}p_1'^i = m_2\mathscr{E}_1', \\ p_{1i}p_1'^i = \mathscr{E}_1\mathscr{E}_1' - \mathbf{p}_1\mathbf{p}_1' = \mathscr{E}_1\mathscr{E}_1' - p_1p_1'\cos\theta_1, \end{gathered} \tag{13,4}$$

где θ_1 — угол рассеяния налетающей частицы m_1. Подставив эти выражения в (13,2), получим:

$$\cos\theta_1 = \frac{\mathscr{E}_1'(\mathscr{E}_1 + m_2) - \mathscr{E}_1 m_2 - m_1^2}{p_1p_1'}. \tag{13,5}$$

Аналогичным образом из (13,3) найдем:

$$\cos\theta_2 = \frac{(\mathscr{E}_1 + m_2)(\mathscr{E}_2' - m_2)}{p_1p_2'}, \tag{13,6}$$

где θ_2 — угол, образуемый импульсом отдачи $\mathbf{p}_2'$ с импульсом налетающей частицы $\mathbf{p}_1$.

Формулы (13,5—6) связывают углы рассеяния обеих частиц в $л$-системе с изменениями их энергии при столкновениях. Обращая эти формулы, можно выразить энергии $\mathscr{E}_1'$, $\mathscr{E}_2'$ через угол θ_1 или θ_2. Так, подставив в (13,6) $p_1 = \sqrt{\mathscr{E}_1^2 - m_1^2}$, $p_2' = \sqrt{\mathscr{E}_2'^2 - m_2^2}$ и возведя равенство в квадрат, после простого вычисления получим:

$$\mathscr{E}_2' = m_2 \frac{(\mathscr{E}_1 + m_2)^2 + (\mathscr{E}_1^2 - m_1^2)\cos^2\theta_2}{(\mathscr{E}_1 + m_2)^2 - (\mathscr{E}_1^2 - m_1^2)\cos^2\theta_2}. \tag{13,7}$$

Обращение же формулы (13,5) приводит в общем случае к весьма громоздкому выражению $\mathscr{E}_1'$ через θ_1.

Отметим, что если $m_1 > m_2$, т. е. налетающая частица тяжелее покоящейся, то угол рассеяния θ_1 не может превышать некоторого максимального значения. Элементарным вычислением легко найти, что это значение определяется равенством

$$\sin\theta_{1\,\max} = \frac{m_2}{m_1}, \tag{13,8}$$

в точности совпадающим с известным классическим результатом.

Формулы (13,5—6) упрощаются в случае, когда налетающая частица обладает равной нулю массой: $m_1 = 0$, и соответственно $p_1 = \mathscr{E}_1$, $p_1' = \mathscr{E}_1'$. Выпишем для этого случая формулу для

энергии налетающей частицы после столкновения, выраженной через угол ее отклонения:

$$\mathscr{E}_1' = \frac{m_2}{1 - \cos\theta_1 + \frac{m_2}{\mathscr{E}_1}}. \tag{13,9}$$

Вернемся снова к общему случаю столкновения частиц любых масс. Наиболее просто столкновение выглядит в *ц*-системе. Отмечая значения величин в этой системе дополнительным индексом 0, имеем здесь $\mathbf{p}_{10} = -\mathbf{p}_{20} \equiv \mathbf{p}_0$. В силу сохранения импульса, импульсы обеих частиц при столкновении только поворачиваются, оставаясь равными по величине и противоположными по направлению. В силу же сохранения энергии абсолютные значения каждого из импульсов остаются неизменными.

Обозначим через χ угол рассеяния в *ц*-системе — угол, на который поворачиваются при столкновении импульсы $\mathbf{p}_{10}$ и $\mathbf{p}_{20}$. Этой величиной полностью определяется процесс рассеяния в системе центра инерции, а потому и во всякой другой системе отсчета. Ее удобно выбрать также и при описании столкновения в *л*-системе в качестве того единственного параметра, который остается неопределенным после учета законов сохранения энергии и импульса.

Выразим через этот параметр конечные энергии обеих частиц в *л*-системе. Для этого вернемся к соотношению (13,2), но на этот раз раскроем произведение $p_{1i}p_1'^i$ в *ц*-системе:

$$p_{1i}p_1'^i = \mathscr{E}_{10}\mathscr{E}_{10}' - \mathbf{p}_{10}\mathbf{p}_{10}' = \mathscr{E}_{10}^2 - p_0^2\cos\chi = p_0^2(1 - \cos\chi) + m_1^2$$

(в *ц*-системе энергия каждой из частиц при столкновении не меняется: $\mathscr{E}_{10}' = \mathscr{E}_{10}$). Остальные же два произведения раскрываем по-прежнему в *л*-системе, т. е. берем из (13,4). В результате получим:

$$\mathscr{E}_1' - \mathscr{E}_1 = -\frac{p_0^2}{m_2}(1 - \cos\chi).$$

Остается выразить p_0^2 через величины, относящиеся к *л*-системе. Это легко сделать путем приравнивания значений инварианта $p_{1i}p_2^i$ в *ц*- и *л*-системах:

$$\mathscr{E}_{10}\mathscr{E}_{20} - \mathbf{p}_{10}\mathbf{p}_{20} = \mathscr{E}_1 m_2,$$

или

$$\sqrt{(p_0^2 + m_1^2)(p_0^2 + m_2^2)} = \mathscr{E}_1 m_2 - p_0^2.$$

Решая это уравнение относительно p_0^2, получим:

$$p_0^2 = \frac{m_2^2(\mathscr{E}_1^2 - m_1^2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2\mathscr{E}_1}. \tag{13,10}$$

Таким образом, окончательно имеем:

$$\mathscr{E}_1' = \mathscr{E}_1 - \frac{m_2(\mathscr{E}_1^2 - m_1^2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2\mathscr{E}_1}(1 - \cos\chi). \qquad (13,11)$$

Энергия второй частицы получается из закона сохранения: $\mathscr{E}_1 + m_2 = \mathscr{E}_1' + \mathscr{E}_2'$. Поэтому

$$\mathscr{E}_2' = m_2 + \frac{m_2(\mathscr{E}_1^2 - m_1^2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2\mathscr{E}_1}(1 - \cos\chi). \qquad (13,12)$$

Вторые члены в этих формулах представляют собой энергию, теряемую первой и приобретаемую второй частицей. Наибольшая передача энергии получается при $\chi = \pi$ и равна

$$\mathscr{E}_{2\,\max}' - m_2 = \mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_{1\,\min}' = \frac{2m_2(\mathscr{E}_1^2 - m_1^2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2\mathscr{E}_1}. \qquad (13,13)$$

Отношение минимальной кинетической энергии налетающей частицы после столкновения к ее первоначальной кинетической энергии:

$$\frac{\mathscr{E}_{1\,\min}' - m_1}{\mathscr{E}_1 - m_1} = \frac{(m_1 - m_2)^2}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2\mathscr{E}_1}. \qquad (13,14)$$

В предельном случае малых скоростей (когда $\mathscr{E} \approx m + mv^2/2$) это отношение стремится к постоянному пределу, равному

$$\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2.$$

В обратном же пределе больших энергий $\mathscr{E}_1$ отношение (13,14) стремится к нулю; к постоянному же пределу стремится сама величина $\mathscr{E}_{1\,\min}'$. Этот предел равен

$$\mathscr{E}_{1\,\min}' = \frac{m_1^2 + m_2^2}{2m_2}.$$

Предположим, что $m_2 \gg m_1$, т. е. масса налетающей частицы мала по сравнению с массой покоившейся частицы. Согласно классической механике при этом легкая частица могла бы передать тяжелой только ничтожную часть своей энергии (см. I § 17). Такое положение не имеет, однако, места в релятивистской теории. Из формулы (13,14) видно, что при достаточно больших энергиях $\mathscr{E}_1$ доля переданной энергии может достичь порядка 1. Для этого, однако, недостаточно, чтобы скорость частицы m_1 была порядка 1, а необходимы, как легко видеть, энергии

$$\mathscr{E}_1 \sim m_2,$$

т. е. легкая частица должна обладать энергией порядка энергии покоя тяжелой частицы.

Аналогичное положение имеет место при $m_2 \ll m_1$, т. е. когда тяжелая частица налетает на легкую. И здесь, согласно класси-

ческой механике, происходила бы лишь незначительная передача энергии. Доля передаваемой энергии начинает становиться значительной только начиная от энергий

$$\mathscr{E}_1 \sim \frac{m_1^2}{m_2}.$$

Отметим, что и здесь речь идет не просто о скоростях порядка скорости света, а об энергиях, больших по сравнению с m_1, т. е. об ультрарелятивистском случае.

Задачи

1. На рис. 4 треугольника ABC образован вектором импульса $\mathbf{p}_1$ налетающей частицы и импульсами $\mathbf{p}_1'$, $\mathbf{p}_2'$ обеих частиц после столкновения. Найти геометрическое место точек C, соответствующих всем возможным значениям $\mathbf{p}_1'$, $\mathbf{p}_2'$.

Решение. Искомая кривая представляет собой эллипс, полуоси которого могут быть найдены непосредственно с помощью формул, полученных

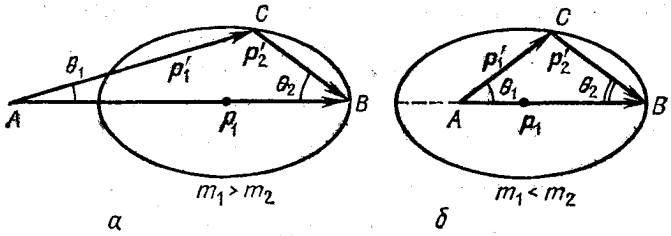

Рис. 4

в задаче 1 к § 11. Действительно, произведенное там построение представляет собой нахождение геометрического места концов векторов $\mathbf{p}$ в $л$-системе, получающихся из произвольно направленных векторов $\mathbf{p}_0$ с заданной длиной p_0 в $ц$-системе.

Учитывая, что абсолютные величины импульсов сталкивающихся частиц в $ц$-системе одинаковы и не меняются при столкновении, мы имеем дело в данном случае с аналогичным построением для вектора p_1', для которого в $ц$-системе

$$p_0 = p_{10} = p_{20} = \frac{m_2 V}{\sqrt{1-V^2}},$$

где V — скорость частицы m_2 в $ц$-системе, совпадающая по величине со скоростью центра инерции, равной $V = p_1/(\mathscr{E}_1 + m_2)$ (см. (11,4)). В результате найдем, что малая и большая полуоси эллипса равны

$$p_0 = \frac{m_2 p_1}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2\mathscr{E}_1}},$$

$$\frac{p_0}{\sqrt{1-V^2}} = \frac{m_2 p_1 (\mathscr{E}_1 + m_2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2\mathscr{E}_1}$$

(первое из этих выражений совпадает, конечно, с (13.10)).

При $\theta_1 = 0$ вектор $\mathbf{p}_1'$ совпадает с $\mathbf{p}_1$, так что расстояние AB равно p_1. Сравнивая p_1 с удвоенной большой полуосью эллипса, легко убедиться, что точка A лежит вне эллипса, если $m_1 > m_2$ (рис. 4, *а*) и внутри него при $m_1 < m_2$ (рис. 4, *б*).

2. Определить минимальный угол разлета $\Theta_{\min}$ частиц после столкновения, если массы обеих частиц одинаковы ($m_1 = m_2 \equiv m$).

Решение. При $m_1 = m_2$ точка A диаграммы лежит на эллипсе, а минимальному углу разлета соответствует положение точки C в конце малой полуоси (рис. 5). Из построения ясно, что $\operatorname{tg}(\Theta_{\min}/2)$ дается отношением длин полуосей, и мы находим:

$$\operatorname{tg}\frac{\Theta_{\min}}{2} = \sqrt{\frac{2m}{\mathscr{E}_1 + m}},$$

или

$$\cos\Theta_{\min} = \frac{\mathscr{E}_1 - m}{\mathscr{E}_1 + 3m}.$$

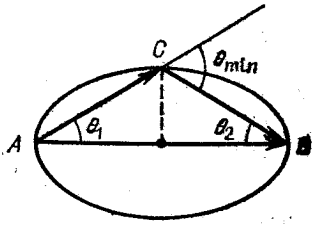

Рис. 5

3. Для столкновения двух частиц одинаковой массы m выразить $\mathscr{E}_1'$, $\mathscr{E}_2'$, χ через угол рассеяния в *л*-системе θ_1.

Решение. Обращение формулы (13,5) дает в этом случае:

$$\mathscr{E}_1' = \frac{(\mathscr{E}_1 + m) + (\mathscr{E}_1 - m)\cos^2\theta_1}{(\mathscr{E}_1 + m) - (\mathscr{E}_1 - m)\cos^2\theta_1}\, m,$$

$$\mathscr{E}_2' = m + \frac{(\mathscr{E}_1^2 - m^2)\sin^2\theta_1}{2m + (\mathscr{E}_1 - m)\sin^2\theta_1}.$$

Сравнивая с выражением $\mathscr{E}_1'$ через χ:

$$\mathscr{E}_1' = \mathscr{E}_1 - \frac{\mathscr{E}_1 - m}{2}(1 - \cos\chi),$$

найдем угол рассеяния в *ц*-системе:

$$\cos\chi = \frac{2m - (\mathscr{E}_1 + 3m)\sin^2\theta_1}{2m + (\mathscr{E}_1 - m)\sin^2\theta_1}.$$

§ 14. Момент импульса

Как известно из классической механики, у замкнутой системы, кроме энергии и импульса, сохраняется еще и момент импульса, т. е. вектор

$$\mathbf{M} = \sum [\mathbf{r}\mathbf{p}]$$

($\mathbf{r}$ и $\mathbf{p}$ — радиус-вектор и импульс частицы; суммирование производится по всем частицам, входящим в состав системы). Сохранение момента является следствием того, что функция Лагранжа для замкнутой системы в силу изотропии пространства не меняется при повороте системы как целого.

Проделав теперь аналогичный вывод в четырехмерном виде, мы получим релятивистское выражение для момента. Пусть x^i — координаты одной из частиц системы. Произведем бесконечно малый поворот в четырехмерном пространстве. Это есть