

При $\theta_1 = 0$ вектор p'_1 совпадает с p_1 , так что расстояние AB равно p_1 . Сравнивая p_1 с удвоенной большой полуосью эллипса, легко убедиться, что точка A лежит вне эллипса, если $m_1 > m_2$ (рис. 4, а) и внутри него при $m_1 < m_2$ (рис. 4, б).

2. Определить минимальный угол разлета Θ_{\min} частиц после столкновения, если массы обеих частиц одинаковы ($m_1 = m_2 \equiv m$).

Решение. При $m_1 = m_2$ точка A диаграммы лежит на эллипсе, а минимальному углу разлета соответствует положение точки C в конце малой полуоси (рис. 5). Из построения ясно, что $\operatorname{tg}(\Theta_{\min}/2)$ дается отношением длин полуосей, и мы находим:

$$\operatorname{tg} \frac{\Theta_{\min}}{2} = \sqrt{\frac{2m}{\mathcal{E}_1 + m}},$$

или

$$\cos \Theta_{\min} = \frac{\mathcal{E}_1 - m}{\mathcal{E}_1 + 3m}.$$

3. Для столкновения двух частиц одинаковой массы m выразить $\mathcal{E}'_1, \mathcal{E}'_2, \chi$ через угол рассеяния в λ -системе θ_1 .

Решение. Обращение формулы (13,5) дает в этом случае:

$$\mathcal{E}'_1 = \frac{(\mathcal{E}_1 + m) + (\mathcal{E}_1 - m) \cos^2 \theta_1}{(\mathcal{E}_1 + m) - (\mathcal{E}_1 - m) \cos^2 \theta_1} m,$$

$$\mathcal{E}'_2 = m + \frac{(\mathcal{E}_1^2 - m^2) \sin^2 \theta_1}{2m + (\mathcal{E}_1 - m) \sin^2 \theta_1}.$$

Сравнивая с выражением \mathcal{E}'_1 через χ :

$$\mathcal{E}'_1 = \mathcal{E}_1 - \frac{\mathcal{E}_1 - m}{2} (1 - \cos \chi),$$

найдем угол рассеяния в ζ -системе:

$$\cos \chi = \frac{2m - (\mathcal{E}_1 + 3m) \sin^2 \theta_1}{2m + (\mathcal{E}_1 - m) \sin^2 \theta_1}.$$

§ 14. Момент импульса

Как известно из классической механики, у замкнутой системы, кроме энергии и импульса, сохраняется еще и момент импульса, т. е. вектор

$$\mathbf{M} = \sum [r p]$$

(r и p — радиус-вектор и импульс частицы; суммирование производится по всем частицам, входящим в состав системы). Сохранение момента является следствием того, что функция Лагранжа для замкнутой системы в силу изотропии пространства не меняется при повороте системы как целого.

Проделав теперь аналогичный вывод в четырехмерном виде, мы получим релятивистское выражение для момента. Пусть x' — координаты одной из частиц системы. Произведем бесконечно малый поворот в четырехмерном пространстве. Это есть

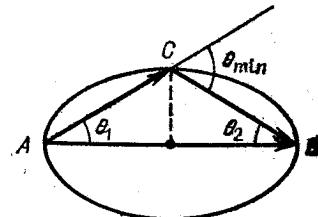


Рис. 5

преобразование, при котором координаты x^i принимают новые значения x'^i , так что разности $x'^i - x^i$ являются линейными функциями:

$$x'^i - x^i = x_k \delta\Omega^{ik}, \quad (14,1)$$

с бесконечно малыми коэффициентами $\delta\Omega_{ik}$. Компоненты 4-тензора $\delta\Omega_{ik}$ связаны при этом соотношениями, возникающими в результате требования, чтобы при повороте оставалась неизменной длина 4-радиус-вектора, т. е. чтобы было $x'_i x'^i = x_i x^i$. Подставляя сюда x'^i из (14,1) и отбрасывая члены, квадратичные по $\delta\Omega_{ik}$, как бесконечно малые высшего порядка, находим:

$$x^i x^k \delta\Omega_{ik} = 0.$$

Это равенство должно выполняться при произвольных x^i . Поскольку $x^i x^k$ — симметричный тензор, $\delta\Omega_{ik}$ должны составлять антисимметричный тензор (произведение симметричного тензора на антисимметричный, очевидно, тождественно равно нулю):

$$\delta\Omega_{ki} = -\delta\Omega_{ik}. \quad (14,2)$$

Изменение действия при бесконечно малом изменении координат начальной a и конечной b точек траектории имеет вид (см. (9,10))

$$\delta S = - \sum p^i \delta x_i |_a^b$$

(суммирование производится по всем частицам системы). В случае рассматриваемого нами сейчас поворота $\delta x_i = \delta\Omega_{ik} x^k$, а потому

$$\delta S = - \delta\Omega_{ik} \sum p^i x^k |_a^b.$$

Если разбить тензор $\sum p^i x^k$ на симметричную и антисимметричную части, то первая из них при умножении на антисимметричный тензор тождественно дает нуль. Поэтому, выделяя из $\sum p^i x^k$ антисимметричную часть, мы можем написать предыдущее равенство в виде

$$\delta S = - \delta\Omega_{ik} \frac{1}{2} \sum (p^i x^k - p^k x^i) |_a^b. \quad (14,3)$$

Для замкнутой системы действие, будучи инвариантом, не меняется при повороте в 4-пространстве. Это означает, что должны быть равны нулю коэффициенты при $\delta\Omega_{ik}$ в (14,3):

$$\sum (p^i x^k - p^k x^i)_b = \sum (p^i x^k - p^k x^i)_a.$$

Мы видим, что у замкнутой системы остается постоянным при движении, т. е. сохраняется, тензор

$$M^{ik} = \sum (x^i p^k - x^k p^i). \quad (14,4)$$

Этот антисимметричный тензор носит название 4-тензора *момента*.

Пространственные компоненты тензора момента совпадают с компонентами трехмерного вектора момента $\mathbf{M} = \sum [\mathbf{r} p]$:

$$M^{23} = M_x, \quad -M^{13} = M_y, \quad M^{12} = M_z.$$

Компоненты же M^{01}, M^{02}, M^{03} составляют вектор $\sum (tp - \mathcal{E}r/c^2)$. Таким образом, можно записать компоненты тензора M^{ik} в виде

$$M^{ik} = \left(c \sum \left(tp - \frac{\mathcal{E}r}{c^2} \right), -\mathbf{M} \right) \quad (14,5)$$

(ср. (6.10)).

В силу сохранения M^{ik} для замкнутой системы имеем, в частности:

$$\sum \left(tp - \frac{\mathcal{E}r}{c^2} \right) = \text{const.}$$

Поскольку, с другой стороны, полная энергия $\sum \mathcal{E}$ тоже сохраняется, то это равенство можно написать в виде

$$\frac{\sum \mathcal{E}r}{\sum \mathcal{E}} - t \frac{c^2 \sum p}{\sum \mathcal{E}} = \text{const.}$$

Отсюда мы видим, что точка с радиус-вектором

$$\mathbf{R} = \frac{\sum \mathcal{E}r}{\sum \mathcal{E}} \quad (14,6)$$

равномерно движется со скоростью

$$\mathbf{V} = \frac{c^2 \sum p}{\sum \mathcal{E}}, \quad (14,7)$$

которая есть не что иное, как скорость движения системы как целого (отвечающая по формуле (9.8) ее полным энергии и импульсу). Формула (14,6) дает релятивистское определение координат центра инерции системы. Если скорости всех частиц малы по сравнению с c , то можно приближенно положить $\mathcal{E} \approx mc^2$ и (14,6) переходит в обычное классическое выражение¹⁾

$$\mathbf{R} = \frac{\sum m\mathbf{r}}{\sum m}.$$

¹⁾ В то время как классическая формула для центра инерции относится к системам как невзаимодействующих, так и взаимодействующих частиц, формула (14,6) справедлива лишь при пренебрежении взаимодействием. В релятивистской механике определение центра инерции системы взаимодействующих частиц требует учета в явном виде также импульса и энергии создаваемого ими поля.

Обратим внимание на то, что компоненты вектора (14.6) не составляют пространственных компонент какого-либо 4-вектора и потому при преобразовании системы отсчета не преобразуются как координаты какой-либо точки. Поэтому центр инерции одной и той же системы частиц по отношению к различным системам отсчета — это различные точки.

Задача

Найти связь между моментом импульса \mathbf{M} тела (системы частиц) в системе отсчета K , в которой тело движется со скоростью \mathbf{V} , и его моментом $\mathbf{M}^{(0)}$ в системе отсчета K_0 , в которой тело как целое покоятся; в обоих случаях момент определяется по отношению к одной и той же точке — центру инерции тела в системе K_0 ¹⁾.

Решение. Система K_0 движется относительно K со скоростью \mathbf{V} ; выберем ее направление в качестве оси x . Интересующие нас компоненты тензора M^{ik} преобразуются по формулам (см. задачу 2 § 6)

$$M^{12} = \frac{M^{(0)12} + \frac{V}{c} M^{(0)02}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad M^{13} = \frac{M^{(0)13} + \frac{V}{c} M^{(0)03}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad M^{23} = M^{(0)23}.$$

Так как начало координат выбрано в центре инерции тела (в системе K_0), то в этой системе $\sum \mathcal{F}_r = 0$, а поскольку в ней $\sum p = 0$, то $M^{(0)02} = M^{(0)03} = 0$. Учитывая связь между компонентами M^{ik} и вектором \mathbf{M} , находим для последнего:

$$M_x = M_x^{(0)}, \quad M_y = \frac{M_y^{(0)}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad M_z = \frac{M_z^{(0)}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

¹⁾ Напомним, что хотя в системе K_0 (в которой $\sum p = 0$) момент импульса не зависит от выбора точки, по отношению к которой он определяется, но в системе K (в которой $\sum p \neq 0$) момент зависит от этого выбора (см. I § 9).