она не могла бы деформироваться, так как понятие деформации связано с возможностью независимого движения отдельных частей тела. Но, как мы только что видели, теория относительности показывает невозможность существования абсолютно твердых тел.

Таким образом, в классической (неквантовой) релятивистской механике частицам, которые мы рассматриваем как элементарные, нельзя приписывать конечных размеров. Другими словами, в пределах классической теории элементарные частицы должны рассматриваться как точечные[1]).

§ 16. Четырехмерный потенциал поля

Действие для частицы, движущейся в заданном электромагнитном поле, складывается из двух частей: из действия (8,1) свободной частицы и из члена, описывающего взаимодействие частицы с полем. Последний должен содержать как величины, характеризующие частицу, так и величины, характеризующие поле.

Оказывается[2]), что свойства частицы в отношении ее взаимодействия с электромагнитным полем определяются всего одним параметром — так называемым *зарядом* частицы e, который может быть как положительной, так и отрицательной (или равной нулю) величиной. Свойства же поля характеризуются 4-вектором A_i, так называемым *4-потенциалом*, компоненты которого являются функциями координат и времени. Эти величины входят в действие в виде члена

$$-\frac{e}{c}\int_a^b A_i\,dx^i,$$

где функции A_i берутся в точках мировой линии частицы. Множитель $1/c$ введен здесь для удобства. Следует отметить, что до тех пор, пока у нас нет никаких формул, связывающих заряд

---

[1]) Хотя квантовая механика существенно меняет ситуацию, однако и здесь теория относительности делает крайне трудным введение неточечного взаимодействия.

[2]) Следующие ниже утверждения надо рассматривать в значительной степени как результат опытных данных. Вид действия для частицы в электромагнитном поле не может быть установлен на основании одних только общих соображений, таких, как требование релятивистской инвариантности (последнее допускало бы, например, в действии также и член вида $\int A\,ds$, где A — скалярная функция).

Во избежание недоразумений напомним, что речь идет везде о классической (не квантовой) теории, и потому нигде не учитываются эффекты, связанные со спином частиц.

или потенциалы с известными уже величинами, единицы для их измерения могут быть выбраны произвольным образом[1]).

Таким образом, действие для заряда в электромагнитном поле имеет вид

$$S=\int_a^b\left(-mc\,ds-\frac{e}{c}A_i\,dx^i\right). \tag{16,1}$$

Три пространственные компоненты 4-вектора A^i образуют трехмерный вектор $\mathbf{A}$, называемый *векторным потенциалом* поля. Временную же компоненту называют *скалярным потенциалом*; обозначим ее как $A^0=\varphi$. Таким образом,

$$A^i=(\varphi,\ \mathbf{A}). \tag{16,2}$$

Поэтому интеграл действия можно написать в виде

$$S=\int_a^b\left(-mc\,ds+\frac{e}{c}\mathbf{A}\,d\mathbf{r}-e\varphi\,dt\right),$$

или, вводя скорость частицы $\mathbf{v}=d\mathbf{r}/dt$ и переходя к интегрированию по времени,

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\left(-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+\frac{e}{c}\mathbf{A}\mathbf{v}-e\varphi\right)dt. \tag{16,3}$$

Подынтегральное выражение есть функция Лагранжа для заряда в электромагнитном поле:

$$L=-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+\frac{e}{c}\mathbf{A}\mathbf{v}-e\varphi. \tag{16,4}$$

Это выражение отличается от функции Лагранжа (8,2) для свободной частицы членами $\frac{e}{c}\mathbf{A}\mathbf{v}-e\varphi$, которые описывают взаимодействие заряда с полем.

Производная $\partial L/\partial\mathbf{v}$ есть обобщенный импульс частицы; обозначим его посредством $\mathbf{P}$. Производя дифференцирование, находим:

$$\mathbf{P}=\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+\frac{e}{c}\mathbf{A}=\mathbf{p}+\frac{e}{c}\mathbf{A}. \tag{16,5}$$

Здесь мы обозначили посредством $\mathbf{p}$ обычный импульс частицы, который мы и будем называть просто импульсом.

---

[1]) Об установлении этих единиц см. § 27.

Из функции Лагранжа можно найти функцию Гамильтона частицы в поле по известной общей формуле

$$\mathscr{H} = \mathbf{v}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - L.$$

Подставляя сюда (16,4), найдем:

$$\mathscr{H} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + e\varphi. \tag{16,6}$$

Функция Гамильтона, однако, должна быть выражена не через скорость, а через обобщенный импульс частицы.

Из (16,5—6) видно, что соотношение между $\mathscr{H} - e\varphi$ и $\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}$ — такое же, как между $\mathscr{H}$ и $\mathbf{p}$ в отсутствие поля, т. е.

$$\left(\frac{\mathscr{H} - e\varphi}{c}\right)^2 = m^2c^2 + \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2, \tag{16,7}$$

или иначе:

$$\mathscr{H} = \sqrt{m^2c^4 + c^2\left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2} + e\varphi. \tag{16,8}$$

Для малых скоростей, т. е. в классической механике, функция Лагранжа (16,4) переходит в

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\mathbf{v} - e\varphi. \tag{16,9}$$

В этом приближении

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A},$$

и мы находим следующее выражение для функции Гамильтона:

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + e\varphi. \tag{16,10}$$

Наконец, выпишем уравнение Гамильтона — Якоби для частицы в электромагнитном поле. Оно получается заменой в функции Гамильтона обобщенного импульса $\mathbf{P}$ на $\partial S/\partial \mathbf{r}$, а самого $\mathscr{H}$ — на $-\partial S/\partial t$. Таким образом, получим из (16,7):

$$\left(\operatorname{grad} S - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + e\varphi\right)^2 + m^2c^2 = 0. \tag{16,11}$$

§ 17. Уравнения движения заряда в поле

Заряд, находящийся в поле, не только подвергается воздействию со стороны поля, но в свою очередь сам влияет на поле, изменяя его. Однако если заряд e не велик, то его действием на поле можно пренебречь. В этом случае, рассматривая движение в заданном поле, можно считать, что само поле не зависит ни от координат, ни от скорости заряда. Точные условия,