

Из функции Лагранжа можно найти функцию Гамильтона частицы в поле по известной общей формуле

$$\mathcal{H} = \mathbf{v} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - L.$$

Подставляя сюда (16,4), найдем:

$$\mathcal{H} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e\varphi. \quad (16,6)$$

Функция Гамильтона, однако, должна быть выражена не через скорость, а через обобщенный импульс частицы.

Из (16,5—6) видно, что соотношение между  $\mathcal{H}$  —  $e\varphi$  и  $\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}$  — такое же, как между  $\mathcal{H}$  и  $\mathbf{p}$  в отсутствие поля, т. е.

$$\left( \frac{\mathcal{H} - e\varphi}{c} \right)^2 = m^2 c^4 + \left( \mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2, \quad (16,7)$$

или иначе:

$$\mathcal{H} = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \left( \mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2} + e\varphi. \quad (16,8)$$

Для малых скоростей, т. е. в классической механике, функция Лагранжа (16,4) переходит в

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \mathbf{v} - e\varphi. \quad (16,9)$$

В этом приближении

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A},$$

и мы находим следующее выражение для функции Гамильтона:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left( \mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\varphi. \quad (16,10)$$

Наконец, выпишем уравнение Гамильтона — Якоби для частицы в электромагнитном поле. Оно получается заменой в функции Гамильтона обобщенного импульса  $\mathbf{P}$  на  $\partial S / \partial \mathbf{r}$ , а самого  $\mathcal{H}$  — на  $-\partial S / \partial t$ . Таким образом, получим из (16,7):

$$\left( \text{grad } S - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial S}{\partial t} + e\varphi \right)^2 + m^2 c^2 = 0. \quad (16,11)$$

## § 17. Уравнения движения заряда в поле

Заряд, находящийся в поле, не только подвергается воздействию со стороны поля, но в свою очередь сам влияет на поле, изменяя его. Однако если заряд  $e$  не велик, то его действием на поле можно пренебречь. В этом случае, рассматривая движение в заданном поле, можно считать, что само поле не зависит ни от координат, ни от скорости заряда. Точные условия,

которым должен удовлетворять заряд для того, чтобы он мог считаться в указанном смысле малым, будут выяснены в дальнейшем (§ 75). Ниже мы будем считать это условие выполненным.

Итак, нам надо найти уравнения движения заряда в заданном электромагнитном поле. Эти уравнения получаются варьированием действия, т. е. даются уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial L}{\partial r}, \quad (17,1)$$

где  $L$  определяется формулой (16,4).

Производная  $\partial L / \partial v$  есть обобщенный импульс частицы (16,5). Далее пишем:

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \nabla L = \frac{e}{c} \operatorname{grad} \mathbf{A}v - e \operatorname{grad} \varphi.$$

Но по известной формуле векторного анализа

$$\operatorname{grad} ab = (a\nabla)b + (b\nabla)a + [b \operatorname{rot} a] + [a \operatorname{rot} b],$$

где  $a$  и  $b$  — любые два вектора. Применяя эту формулу к  $A v$  и помня, что дифференцирование по  $r$  производится при постоянном  $v$ , находим:

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \frac{e}{c} (v\nabla) A + \frac{e}{c} [v \operatorname{rot} A] - e \operatorname{grad} \varphi.$$

Уравнения Лагранжа, следовательно, имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left( p + \frac{e}{c} A \right) = \frac{e}{c} (v\nabla) A + \frac{e}{c} [v \operatorname{rot} A] - e \operatorname{grad} \varphi.$$

Но полный дифференциал  $\frac{dA}{dt} dt$  складывается из двух частей: из изменения  $\frac{\partial A}{\partial t} dt$  векторного потенциала со временем в данной точке пространства и из изменения при переходе от одной точки пространства к другой на расстояние  $dr$ . Эта вторая часть равна  $(dr\nabla)A$ . Таким образом,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + (v\nabla) A.$$

Подставляя это в предыдущее уравнение, получаем:

$$\frac{dp}{dt} = - \frac{e}{c} \frac{\partial A}{\partial t} - e \operatorname{grad} \varphi + \frac{e}{c} [v \operatorname{rot} A]. \quad (17,2)$$

Это и есть уравнение движения частицы в электромагнитном поле. Слева стоит производная от импульса частицы по времени. Следовательно, выражение в правой части (17,2) есть сила, действующая на заряд в электромагнитном поле. Мы видим, что

эта сила состоит из двух частей. Первая часть (первый и второй члены в правой части (17,2)) не зависит от скорости частицы. Вторая часть (третий член) зависит от этой скорости: пропорциональна величине скорости и перпендикулярна к ней.

Силу первого рода, отнесенную к заряду, равному единице, называют *напряженностью электрического поля*; обозначим ее посредством  $\mathbf{E}$ . Итак, по определению,

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi. \quad (17,3)$$

Множитель при скорости, точнее при  $v/c$ , в силе второго рода, действующей на единичный заряд, называют *напряженностью магнитного поля*; обозначим ее через  $\mathbf{H}$ . Итак, по определению,

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (17,4)$$

Если в электромагнитном поле  $\mathbf{E} \neq 0$ , а  $\mathbf{H} = 0$ , то говорят об *электрическом поле*; если же  $\mathbf{E} = 0$ , а  $\mathbf{H} \neq 0$ , то поле называют *магнитным*. В общем случае электромагнитное поле является наложением полей электрического и магнитного.

Отметим, что  $\mathbf{E}$  представляет собой полярный, а  $\mathbf{H}$  — аксиальный вектор.

Уравнения движения заряда в электромагнитном поле можно теперь написать в виде

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}]. \quad (17,5)$$

Стоящее справа выражение носит название *лоренцевой силы*. Первая ее часть — сила, с которой действует электрическое поле на заряд, — не зависит от скорости заряда и ориентирована по направлению поля  $\mathbf{E}$ . Вторая часть — сила, оказываемая магнитным полем на заряд, — пропорциональна скорости заряда и направлена перпендикулярно к этой скорости и к направлению магнитного поля  $\mathbf{H}$ .

Для скоростей, малых по сравнению со скоростью света, импульс  $\mathbf{p}$  приближенно равен своему классическому выражению  $mv$ , и уравнение движения (17,5) переходит в

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}]. \quad (17,6)$$

Выведем еще уравнение, определяющее изменение кинетической энергии частицы<sup>1</sup>) со временем, т. е. производную

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{кин}}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

<sup>1)</sup> Под «кинетической» мы понимаем здесь и ниже энергию (9,4), включающую в себя энергию покоя.

Легко убедиться, что

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{кин}}}{dt} = \mathbf{v} \frac{d\mathbf{p}}{dt};$$

подставляя  $d\mathbf{p}/dt$  из (17,5) и замечая, что  $[\mathbf{v}\mathbf{H}]v = 0$ , имеем

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{кин}}}{dt} = e\mathbf{E}\mathbf{v}. \quad (17,7)$$

Изменение кинетической энергии со временем есть работа, произведенная полем над частицей (в единицу времени). Из (17,7) видно, что эта работа равна произведению скорости заряда на силу, с которой действует на него электрическое поле. Работа поля за время  $dt$ , т. е. при перемещении заряда на  $d\mathbf{r}$ , равна  $e\mathbf{E}d\mathbf{r}$ .

Подчеркнем, что работу над зарядом производит только электрическое поле; магнитное поле не производит работы над движущимся в нем зарядом. Последнее связано с тем, что сила, с которой магнитное поле действует на частицу, всегда перпендикулярна к ее скорости.

Уравнения механики инвариантны по отношению к изменению знака у времени, т. е. по отношению к замене будущего прошедшим. Другими словами, в механике оба направления времени эквивалентны. Это значит, что если согласно уравнениям механики возможно какое-нибудь движение, то возможно и обратное движение, при котором система проходит те же состояния в обратном порядке.

Легко видеть, что то же самое имеет место и в электромагнитном поле в теории относительности. При этом, однако, вместе с заменой  $t$  на  $-t$  надо изменить знак магнитного поля. Действительно, легко видеть, что уравнения движения (17,5) не меняются, если произвести замену

$$t \rightarrow -t, \quad \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{H}. \quad (17,8)$$

При этом, согласно (17,3—4), скалярный потенциал не меняется, а векторный меняет знак:

$$\varphi \rightarrow \varphi, \quad \mathbf{A} \rightarrow -\mathbf{A}. \quad (17,9)$$

Таким образом, если в электромагнитном поле возможно некоторое движение, то возможно и обратное движение в поле с обратным направлением  $\mathbf{H}$ .

### Задача

Выразить ускорение частицы через ее скорость и напряженности электрического и магнитного полей.

**Решение.** Подставляем в уравнение движения (17,5)  $\mathbf{p} = v\mathcal{E}_{\text{кин}}/c^2$ , а  $d\mathcal{E}_{\text{кин}}/dt$  выражаем согласно (17,7). В результате найдем:

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}] - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} (\mathbf{v}\mathbf{E}) \right\}.$$