

§ 18. Калибровочная инвариантность

Рассмотрим теперь вопрос о том, насколько однозначно определены потенциалы поля. При этом следует учесть, что поле характеризуется тем действием, которое оно оказывает на движение находящихся в нем зарядов. Но в уравнения движения (17,5) входят не потенциалы, а напряженности поля \mathbf{E} и \mathbf{H} . Поэтому два поля физически тождественны, если они характеризуются одними и теми же векторами \mathbf{E} и \mathbf{H} .

Если заданы потенциалы \mathbf{A} и ϕ , то этим, согласно (17,3) и (17,4), вполне однозначно определены \mathbf{E} и \mathbf{H} , а значит и поле. Однако одному и тому же полю могут соответствовать различные потенциалы. Чтобы убедиться в этом, прибавим к каждой компоненте потенциала A_k величину $-\partial f / \partial x^k$, где f — произвольная функция от координат и времени. Тогда потенциал A_k переходит в

$$A'_k = A_k - \frac{\partial f}{\partial x^k}. \quad (18,1)$$

При такой замене в интеграле действия (16,1) появится дополнительный член, представляющий собой полный дифференциал:

$$\frac{e}{c} \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k = d\left(\frac{e}{c} f\right), \quad (18,2)$$

что не влияет на уравнения движения (см. I § 2).

Если вместо четырехмерного потенциала ввести векторный и скалярный и вместо координат x^i — координаты ct , x , y , z , то четыре равенства (18,1) можно написать в виде

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } f, \quad \phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (18,3)$$

Легко убедиться в том, что электрическое и магнитное поля, определенные равенствами (17,3—4), действительно не изменяются при подстановке вместо \mathbf{A} и ϕ потенциалов \mathbf{A}' и ϕ' , определенных согласно (18,3). Таким образом, преобразование потенциалов (18,1) не изменяет поля. Потенциалы определены поэтому не однозначно — векторный потенциал определен с точностью до градиента произвольной функции и скалярный — с точностью до производной по времени от той же функции.

В частности, к векторному потенциалу можно прибавить любой постоянный вектор, а к скалярному потенциалу — любую постоянную. Это видно и непосредственно из того, что в определение \mathbf{E} и \mathbf{H} входят только производные от \mathbf{A} и ϕ , и потому прибавление к последним постоянных не влияет на напряженности поля.

Физический смысл имеют лишь те величины, которые инвариантны по отношению к преобразованию потенциалов (18,3);

поэтому все уравнения должны быть инвариантны по отношению к этому преобразованию. Этую инвариантность называют *калибровочной* или *градиентной* (по-немецки ее называют *Eichinvarianz*, по-английски — *gauge invariance*)¹⁾.

Описанная неоднозначность потенциалов дает всегда возможность выбрать их так, чтобы они удовлетворяли одному произвольному дополнительному условию, — одному, так как мы можем произвольно выбрать одну функцию f в (18,3). В частности, всегда можно выбрать потенциалы поля так, чтобы скалярный потенциал ϕ был равен нулю. Сделать же векторный потенциал равным нулю, вообще говоря, невозможно, так как условие $\mathbf{A} = 0$ представляет собой три дополнительных условия (для трех компонент \mathbf{A}).

§ 19. Постоянное электромагнитное поле

Постоянным электромагнитным полем мы называем поле, не зависящее от времени. Очевидно, что потенциалы постоянного поля можно выбрать так, чтобы они были функциями только от координат, но не от времени. Постоянное магнитное поле по-прежнему равно $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$. Постоянное же электрическое поле

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \phi. \quad (19,1)$$

Таким образом, постоянное электрическое поле определяется только скалярным потенциалом, а магнитное — векторным потенциалом.

Мы видели в предыдущем параграфе, что потенциалы поля определены не однозначно. Легко, однако, убедиться в том, что если описывать постоянное электромагнитное поле с помощью не зависящих от времени потенциалов, то к скалярному потенциалу можно прибавить, не изменяя поля, лишь произвольную постоянную (не зависящую ни от координат, ни от времени). Обычно на ϕ накладывают еще дополнительное условие, требуя, чтобы он имел определенное значение в определенной точке пространства; чаще всего выбирают ϕ так, чтобы он был равен нулю на бесконечности. Тогда и упомянутая произвольная постоянная становится определенной, и скалярный потенциал постоянного поля, таким образом, становится вполне однозначным.

Напротив, векторный потенциал по-прежнему не однозначен даже для постоянного электромагнитного поля; к нему можно прибавить градиент любой функции координат.

Определим, чему равна энергия заряда в постоянном электромагнитном поле. Если поле постоянно, то и функция Лагранжа

¹⁾ Подчеркнем, что этот результат связан с подразумевающимся в (18,2) постоянством e . Таким образом, калибровочная инвариантность уравнений электродинамики и сохранение заряда тесно связаны друг с другом.