

поэтому все уравнения должны быть инвариантны по отношению к этому преобразованию. Этую инвариантность называют *калибровочной* или *градиентной* (по-немецки ее называют *Eichinvarianz*, по-английски — *gauge invariance*)¹⁾.

Описанная неоднозначность потенциалов дает всегда возможность выбрать их так, чтобы они удовлетворяли одному произвольному дополнительному условию, — одному, так как мы можем произвольно выбрать одну функцию f в (18,3). В частности, всегда можно выбрать потенциалы поля так, чтобы скалярный потенциал ϕ был равен нулю. Сделать же векторный потенциал равным нулю, вообще говоря, невозможно, так как условие $\mathbf{A} = 0$ представляет собой три дополнительных условия (для трех компонент \mathbf{A}).

§ 19. Постоянное электромагнитное поле

Постоянным электромагнитным полем мы называем поле, не зависящее от времени. Очевидно, что потенциалы постоянного поля можно выбрать так, чтобы они были функциями только от координат, но не от времени. Постоянное магнитное поле по-прежнему равно $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$. Постоянное же электрическое поле

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \phi. \quad (19,1)$$

Таким образом, постоянное электрическое поле определяется только скалярным потенциалом, а магнитное — векторным потенциалом.

Мы видели в предыдущем параграфе, что потенциалы поля определены не однозначно. Легко, однако, убедиться в том, что если описывать постоянное электромагнитное поле с помощью не зависящих от времени потенциалов, то к скалярному потенциалу можно прибавить, не изменяя поля, лишь произвольную постоянную (не зависящую ни от координат, ни от времени). Обычно на ϕ накладывают еще дополнительное условие, требуя, чтобы он имел определенное значение в определенной точке пространства; чаще всего выбирают ϕ так, чтобы он был равен нулю на бесконечности. Тогда и упомянутая произвольная постоянная становится определенной, и скалярный потенциал постоянного поля, таким образом, становится вполне однозначным.

Напротив, векторный потенциал по-прежнему не однозначен даже для постоянного электромагнитного поля; к нему можно прибавить градиент любой функции координат.

Определим, чему равна энергия заряда в постоянном электромагнитном поле. Если поле постоянно, то и функция Лагранжа

¹⁾ Подчеркнем, что этот результат связан с подразумевающимся в (18,2) постоянством e . Таким образом, калибровочная инвариантность уравнений электродинамики и сохранение заряда тесно связаны друг с другом.

для заряда не зависит явно от времени. Как известно, в этом случае энергия сохраняется, совпадая с функцией Гамильтона.

Согласно (16,6) имеем:

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e\varphi. \quad (19,2)$$

Таким образом, вследствие наличия поля к энергии частицы прибавляется член $e\varphi$ — потенциальная энергия заряда в поле. Отметим существенное обстоятельство, что энергия зависит только от скалярного, но не от векторного потенциала. Другими словами, магнитное поле не влияет на энергию зарядов; энергию частицы может изменить только электрическое поле. Это связано с тем, что магнитное поле, в противоположность электрическому, не производит над зарядом работы.

Если напряженность поля во всех точках пространства одинакова, то поле называют *однородным*. Скалярный потенциал однородного электрического поля может быть выражен через напряженность поля согласно равенству

$$\varphi = -Er. \quad (19,3)$$

Действительно, при $E = \text{const}$ имеем $\text{grad}(Er) = (E\nabla)r = E$.

Векторный же потенциал однородного магнитного поля выражается через напряженность этого поля \mathbf{H} в виде

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}[\mathbf{H}\mathbf{r}]. \quad (19,4)$$

Действительно, при $\mathbf{H} = \text{const}$ находим с помощью известных формул векторного анализа:

$$\text{rot}[\mathbf{H}\mathbf{r}] = \mathbf{H} \text{div} \mathbf{r} - (\mathbf{H}\nabla)\mathbf{r} = 2\mathbf{H}$$

(напомним, что $\text{div} \mathbf{r} = 3$).

Векторный потенциал однородного магнитного поля можно выбрать и иначе, например, в виде

$$A_x = -Hy, \quad A_y = Az = 0 \quad (19,5)$$

(ось z выбрана вдоль направления \mathbf{H}). Легко убедиться, что и при таком выборе \mathbf{A} имеет место равенство $\mathbf{H} = \text{rot} \mathbf{A}$. В соответствии с формулами преобразования (18,3) потенциалы (19,4) и (19,5) отличаются друг от друга градиентом некоторой функции: (19,5) получается из (19,4) прибавлением ∇f , где $f = -xyH/2$.

Задача

Написать вариационный принцип для траектории частицы (принцип Монпертона) в постоянном электромагнитном поле в релятивистской механике.

Решение. Принцип Монпертона заключается в том, что если полная энергия частицы сохраняется (движение в постоянном поле), то ее траек-

тория может быть определена из вариационного уравнения

$$\delta \int P \, d\mathbf{r} = 0,$$

где P — обобщенный импульс частицы, выраженный через энергию и дифференциалы координат, а интеграл берется вдоль траектории частицы (см. I § 44). Подставляя $P = p + \frac{e}{c} A$ и замечая, что направления p и $d\mathbf{r}$ совпадают, имеем

$$\delta \int \left(p \, dl + \frac{e}{c} A \, dr \right) = 0,$$

где $dl = \sqrt{dr^2}$ есть элемент дуги. Определяя p из $p^2 + m^2 c^2 = (\mathcal{E} - e\varphi)^2/c^2$, находим окончательно:

$$\delta \int \left\{ \sqrt{\frac{1}{c^2} (\mathcal{E} - e\varphi)^2 - m^2 c^2} \, dl + \frac{e}{c} A \, dr \right\} = 0.$$

§ 20. Движение в постоянном однородном электрическом поле

Рассмотрим движение заряда e в однородном постоянном электрическом поле E . Направление поля примем за ось x . Движение будет, очевидно, происходить в одной плоскости, которую выберем за плоскость xy . Тогда уравнения движения (17,5) примут вид

$$\dot{p}_x = eE, \quad \dot{p}_y = 0$$

(точка над буквой обозначает дифференцирование по t), откуда

$$p_x = eEt, \quad p_y = p_0. \quad (20,1)$$

Начало отсчета времени мы выбрали в тот момент, когда $p_x = 0$; p_0 есть импульс частицы в этот момент.

Кинетическая энергия частицы (энергия без потенциальной энергии в поле) равна $\mathcal{E}_{\text{кин}} = c \sqrt{m^2 c^2 + p^2}$. Подставляя сюда (20,1), находим в нашем случае:

$$\mathcal{E}_{\text{кин}} = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p_0^2 + (ceEt)^2} = \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2}, \quad (20,2)$$

где \mathcal{E}_0 — энергия при $t = 0$.

Согласно (9,8) скорость частицы $v = pc/\mathcal{E}_{\text{кин}}$. Для скорости $v_x = \dot{x}$ имеем, следовательно:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p_x c^2}{\mathcal{E}_{\text{кин}}} = \frac{c^2 e E t}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2}}.$$

Интегрируя, находим:

$$x = \frac{1}{eE} \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2} \quad (20,3)$$

(постоянную интегрирования полагаем равной нулю)¹).

¹⁾ Этот результат (при $p_0 = 0$) совпадает с решением задачи о релятивистском движении с постоянным «собственным ускорением» $w_0 = eE/m$ (см. задачу к § 7). Постоянство этого ускорения связано в данном случае с тем, что электрическое поле не меняется при преобразованиях Лоренца со скоростями V , направленными вдоль поля (см. § 24).