тория может быть определена из вариационного уравнения

$$\delta \int \mathbf{P}\, d\mathbf{r} = 0,$$

где $\mathbf{P}$ — обобщенный импульс частицы, выраженный через энергию и дифференциалы координат, а интеграл берется вдоль траектории частицы (см. I § 44). Подставляя $\mathbf{P} = \mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}$ и замечая, что направления $\mathbf{p}$ и $d\mathbf{r}$ совпадают, имеем:

$$\delta \int \left(p\, dl + \frac{e}{c}\mathbf{A}\, d\mathbf{r} \right) = 0,$$

где $dl = \sqrt{d\mathbf{r}^2}$ есть элемент дуги. Определяя p из $p^2 + m^2c^2 = (\mathscr{E} - e\varphi)^2/c^2$, находим окончательно:

$$\delta \int \left\{ \sqrt{\frac{1}{c^2}(\mathscr{E} - e\varphi)^2 - m^2c^2}\, dl + \frac{e}{c}\mathbf{A}\, d\mathbf{r} \right\} = 0.$$

§ 20. Движение в постоянном однородном электрическом поле

Рассмотрим движение заряда e в однородном постоянном электрическом поле $\mathbf{E}$. Направление поля примем за ось x. Движение будет, очевидно, происходить в одной плоскости, которую выберем за плоскость xy. Тогда уравнения движения (17,5) примут вид

$$\dot{p}_x = eE, \quad \dot{p}_y = 0$$

(точка над буквой обозначает дифференцирование по t), откуда

$$p_x = eEt, \quad p_y = p_0. \tag{20,1}$$

Начало отсчета времени мы выбрали в тот момент, когда $p_x = 0$; p_0 есть импульс частицы в этот момент.

Кинетическая энергия частицы (энергия без потенциальной энергии в поле) равна $\mathscr{E}_{\text{кин}} = c\sqrt{m^2c^2 + p^2}$. Подставляя сюда (20,1), находим в нашем случае:

$$\mathscr{E}_{\text{кин}} = \sqrt{m^2c^4 + c^2p_0^2 + (ceEt)^2} = \sqrt{\mathscr{E}_0^2 + (ceEt)^2}, \tag{20,2}$$

где $\mathscr{E}_0$ — энергия при $t = 0$.

Согласно (9,8) скорость частицы $\mathbf{v} = \mathbf{p}c^2/\mathscr{E}_{\text{кин}}$. Для скорости $v_x = \dot{x}$ имеем, следовательно:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p_x c^2}{\mathscr{E}_{\text{кин}}} = \frac{c^2eEt}{\sqrt{\mathscr{E}_0^2 + (ceEt)^2}}.$$

Интегрируя, находим:

$$x = \frac{1}{eE}\sqrt{\mathscr{E}_0^2 + (ceEt)^2} \tag{20,3}$$

(постоянную интегрирования полагаем равной нулю)[1].

[1]) Этот результат (при $p_0 = 0$) совпадает с решением задачи о релятивистском движении с постоянным «собственным ускорением» $w_0 = eE/m$ (см. задачу к § 7). Постоянство этого ускорения связано в данном случае с тем, что электрическое поле не меняется при преобразованиях Лоренца со скоростями $\mathbf{V}$, направленными вдоль поля (см. § 24).

Для определения y имеем:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{p_y c^2}{\mathscr{E}_{\text{кин}}}=\frac{p_0 c^2}{\sqrt{\mathscr{E}_0^2+(ceEt)^2}},$$

откуда

$$y=\frac{p_0 c}{eE}\operatorname{Arsh}\frac{ceEt}{\mathscr{E}_0}. \tag{20,4}$$

Уравнение траектории находим, выражая из (20,4) t через y и подставляя в (20,3). Это дает:

$$x=\frac{\mathscr{E}_0}{eE}\operatorname{ch}\frac{eEy}{p_0 c}. \tag{20,5}$$

Таким образом, заряд движется в однородном электрическом поле по цепной линии.

Если скорость частицы $v \ll c$, то можно положить $p_0=mv_0$, $\mathscr{E}_0=mc^2$; разлагая (20,5) по степеням $1/c$, получим, с точностью до членов высшего порядка:

$$x=\frac{eE}{2mv_0^2}y^2+\text{const},$$

т. е. заряд движется по параболе, — результат, хорошо известный из классической механики.

§ 21. Движение в постоянном однородном магнитном поле

Рассмотрим теперь движение заряда e в однородном магнитном поле $\mathbf{H}$. Направление поля выберем за ось z. Уравнения движения

$$\dot{\mathbf{p}}=\frac{e}{c}[\mathbf{vH}]$$

мы перепишем в другом виде, подставив вместо импульса

$$\mathbf{p}=\frac{\mathscr{E}\mathbf{v}}{c^2},$$

где $\mathscr{E}$ — энергия частицы, которая в магнитном поле постоянна. Уравнения движения приобретают тогда вид

$$\frac{\mathscr{E}}{c^2}\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{e}{c}[\mathbf{vH}], \tag{21,1}$$

или, в компонентах,

$$\dot{v}_x=\omega v_y,\quad \dot{v}_y=-\omega v_x,\quad \dot{v}_z=0 \tag{21,2}$$

где мы ввели обозначение

$$\omega=\frac{ecH}{\mathscr{E}}. \tag{21,3}$$