Для определения y имеем:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{p_y c^2}{\mathscr{E}_{\text{кин}}}=\frac{p_0 c^2}{\sqrt{\mathscr{E}_0^2+(ceEt)^2}},$$

откуда

$$y=\frac{p_0 c}{eE}\operatorname{Arsh}\frac{ceEt}{\mathscr{E}_0}. \tag{20,4}$$

Уравнение траектории находим, выражая из (20,4) t через y и подставляя в (20,3). Это дает:

$$x=\frac{\mathscr{E}_0}{eE}\operatorname{ch}\frac{eEy}{p_0 c}. \tag{20,5}$$

Таким образом, заряд движется в однородном электрическом поле по цепной линии.

Если скорость частицы $v \ll c$, то можно положить $p_0=mv_0$, $\mathscr{E}_0=mc^2$; разлагая (20,5) по степеням $1/c$, получим, с точностью до членов высшего порядка:

$$x=\frac{eE}{2mv_0^2}y^2+\text{const},$$

т. е. заряд движется по параболе, — результат, хорошо известный из классической механики.

§ 21. Движение в постоянном однородном магнитном поле

Рассмотрим теперь движение заряда e в однородном магнитном поле $\mathbf{H}$. Направление поля выберем за ось z. Уравнения движения

$$\dot{\mathbf{p}}=\frac{e}{c}[\mathbf{vH}]$$

мы перепишем в другом виде, подставив вместо импульса

$$\mathbf{p}=\frac{\mathscr{E}\mathbf{v}}{c^2},$$

где $\mathscr{E}$ — энергия частицы, которая в магнитном поле постоянна. Уравнения движения приобретают тогда вид

$$\frac{\mathscr{E}}{c^2}\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{e}{c}[\mathbf{vH}], \tag{21,1}$$

или, в компонентах,

$$\dot{v}_x=\omega v_y,\quad \dot{v}_y=-\omega v_x,\quad \dot{v}_z=0 \tag{21,2}$$

где мы ввели обозначение

$$\omega=\frac{ecH}{\mathscr{E}}. \tag{21,3}$$

Умножим второе из уравнений (21,2) на i и сложим с первым:

$$\frac{d}{dt}(v_x + iv_y) = -i\omega(v_x + iv_y),$$

откуда

$$v_x + iv_y = ae^{-i\omega t},$$

где a — комплексная постоянная. Ее можно написать в виде $a = v_{0t}e^{-i\alpha}$, где v_{0t} и α вещественны. Тогда

$$v_x + iv_y = v_{0t}e^{-i(\omega t+\alpha)},$$

и, отделяя действительную и мнимую части, находим:

$$v_x = v_{0t}\cos(\omega t + \alpha), \qquad v_y = -v_{0t}\sin(\omega t + \alpha). \tag{21,4}$$

Постоянные v_{0t} и α определяются начальными условиями, α есть начальная фаза; что же касается v_{0t}, то из (21,4) видно, что

$$v_{0t} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2},$$

т. е. v_{0t} есть скорость частицы в плоскости xy, остающаяся при движении постоянной.

Из (21,4) находим, интегрируя еще раз:

$$x = x_0 + r\sin(\omega t + \alpha), \qquad y = y_0 + r\cos(\omega t + \alpha), \tag{21,5}$$

где

$$r = \frac{v_{0t}}{\omega} = \frac{v_{0t}\mathscr{E}}{ecH} = \frac{cp_t}{eH} \tag{21,6}$$

(p_t — проекция импульса на плоскость xy). Из третьего уравнения (21,2) находим: $v_z = v_{0z}$ и

$$z = z_0 + v_{0z}t. \tag{21,7}$$

Из (21,5) и (21,7) видно, что заряд движется в однородном магнитном поле по винтовой линии с осью вдоль магнитного поля и с радиусом r, определяемым (21,6). Скорость частицы при этом постоянна по величине. В частном случае, когда $v_{0z} = 0$, т. е. заряд не имеет скорости вдоль поля, он движется по окружности в плоскости, перпендикулярной к полю.

Величина ω, как видно из формул, есть циклическая частота вращения частицы в плоскости, перпендикулярной к полю.

Если скорость частицы мала, то мы можем приближенно положить $\mathscr{E} = mc^2$. Тогда частота ω превращается в

$$\omega = \frac{eH}{mc}. \tag{21,8}$$

Предположим теперь, что магнитное поле, оставаясь однородным, медленно изменяется по величине и направлению. Выясним, как меняется при этом движение заряженной частицы.

Как известно, при медленном изменении условий движения остаются постоянными так называемые адиабатические инварианты. Поскольку движение в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю, периодично, то адиабатическим инвариантом является интеграл

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint \mathbf{P}_t \, d\mathbf{r},$$

взятый по полному периоду движения, в данном случае по окружности ($\mathbf{P}_t$ — проекция обобщенного импульса на указанную плоскость)[1]. Подставляя $\mathbf{P}_t = \mathbf{p}_t + \frac{e}{c}\mathbf{A}$, имеем:

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint \mathbf{p}_t \, d\mathbf{r} + \frac{e}{2\pi c} \oint \mathbf{A} \, d\mathbf{r}.$$

В первом члене замечаем, что $\mathbf{p}_t$ постоянно по абсолютной величине и направлено по $d\mathbf{r}$; ко второму применяем теорему Стокса и заменяем $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{H}$:

$$I = rp_t - \frac{e}{2c} Hr^2,$$

где r — радиус орбиты[2]. Подставляя в это равенство выражение для r (21,6), находим:

$$I = \frac{cp_t^2}{2eH}. \tag{21,9}$$

Отсюда видно, что при медленном изменении H поперечный импульс p_t меняется пропорционально $\sqrt{H}$.

Этот результат можно применить и к другому случаю — когда частица движется по винтовой линии в постояном, но не вполне однородном магнитном поле (поле мало меняется на расстояниях, сравнимых с радиусом и шагом винтовой орбиты). Такое движение можно рассматривать как движение по круговой орбите, смещающейся с течением времени, а по отношению

---

[1]) См. I § 49. Адиабатическими инвариантами являются вообще интегралы $\oint p \, dq$, взятые по периоду изменения данной координаты q. В рассматриваемом случае периоды по двум координатам — в плоскости, перпендикулярной к $\mathbf{H}$, — совпадают и написанный интеграл I представляет собой сумму двух соответствующих адиабатических инвариантов. Однако каждый из этих инвариантов в отдельности не имеет особого смысла, так как зависит от неоднозначного выбора векторного потенциала поля. Проистекающая отсюда неоднозначность адиабатических инвариантов отражает тот факт, что, рассматривая магнитное поле как однородное во всем пространстве, в принципе нельзя определить возникающее вследствие переменности $\mathbf{H}$ электрическое поле, зависящее в действительности от конкретных условий на бесконечности.

[2]) Проследив за направлением обхода контура орбиты движущимся положительным зарядом, убедимся, что он происходит против часовой стрелки, если смотреть вдоль $\mathbf{H}$. Отсюда знак минус во втором члене.

к этой орбите поле как бы меняется со временем, оставаясь однородным. Тогда можно утверждать, что поперечная (по отношению к направлению поля) компонента импульса меняется по закону $p_t = \sqrt{CH}$, где C — постоянная, а H — заданная функция координат. С другой стороны, как и при движении во всяком постоянном магнитном поле, энергия частицы (а с нею и квадрат ее импульса p^2) остается постоянной. Поэтому продольная компонента импульса меняется по закону

$$p_l^2 = p^2 - p_t^2 = p^2 - CH(x, y, z). \tag{21,10}$$

Поскольку всегда должно быть $p_l^2 \geqslant 0$, то отсюда видно, что проникновение частицы в области достаточно сильного поля ($CH > p^2$) оказывается невозможным. При движении в направлении увеличивающегося поля радиус винтовой траектории убывает пропорционально p_t/H (т. е. пропорционально $1/\sqrt{H}$), а ее шаг — пропорционально p_l. При достижении границы, на которой p_t обращается в нуль, частица отражается от нее: продолжая вращаться в прежнем направлении, она начинает двигаться против градиента поля.

Неоднородность поля приводит также и к другому явлению — медленному поперечному смещению (*дрейфу*) ведущего центра винтовой траектории частицы (так называют в этой связи центр круговой орбиты); этому вопросу посвящена задача 3 к следующему параграфу.

Задача

Определить частоты колебаний заряженного пространственного осциллятора, находящегося в постоянном однородном магнитном поле; собственная частота колебаний осциллятора (при отсутствии поля) равна ω_0.

Решение. Уравнения вынужденных колебаний осциллятора в магнитном поле (направленном вдоль оси z) имеют вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{eH}{mc}\dot{y}, \quad \ddot{y} + \omega_0^2 y = -\frac{eH}{mc}\dot{x}, \quad \ddot{z} + \omega_0^2 z = 0.$$

Умножая второе уравнение на i и складывая с первым, получаем:

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = -i\frac{eH}{mc}\dot{\xi},$$

где $\xi = x + iy$. Отсюда находим, что частоты колебаний осциллятора в плоскости, перпендикулярной к полю, равны

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{eH}{mc}\right)^2} \pm \frac{eH}{2mc}.$$

Если поле H мало, то эта формула переходит в

$$\omega = \omega_0 \pm \frac{eH}{2mc}.$$

Колебания вдоль направления поля остаются неизменными.