

§ 22. Движение заряда в постоянных однородных электрическом и магнитном полях

На конец, рассмотрим движение заряда в случае одновременного наличия однородных и постоянных электрического и магнитного полей. Мы ограничимся при этом нерелятивистским случаем, когда скорость заряда $v \ll c$, и потому его импульс $p = mv$; как мы увидим ниже, для этого необходимо, чтобы электрическое поле было мало по сравнению с магнитным.

Направление \mathbf{H} выберем за ось z , а плоскость, проходящую через векторы \mathbf{H} и \mathbf{E} , за плоскость уг. Тогда уравнения движения

$$m\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}]$$

напишутся в виде

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \frac{e}{c} \dot{y}H, \\ m\ddot{y} &= eE_y - \frac{e}{c} \dot{x}H, \\ m\ddot{z} &= eE_z. \end{aligned} \quad (22,1)$$

Из третьего уравнения видно, что вдоль оси z заряд движется равномерно-ускоренно, т. е.

$$z = \frac{eE_z}{2m} t^2 + v_{0z}t. \quad (22,2)$$

Умножая второе из уравнений (22,1) на i и складывая с первым, находим:

$$\frac{d}{dt}(\dot{x} + i\dot{y}) + i\omega(\dot{x} + i\dot{y}) = i\frac{e}{m}E_y$$

($\omega = eH/mc$). Интеграл этого уравнения, где $\dot{x} + i\dot{y}$ рассматривается как неизвестное, равен сумме интеграла этого же уравнения без правой части и частного интеграла уравнения с правой частью. Первый из них есть $ae^{-i\omega t}$, второй равен $eE_y/m\omega = cE_y/H$. Таким образом,

$$\dot{x} + i\dot{y} = ae^{-i\omega t} + \frac{cE_y}{H}.$$

Постоянная a , вообще говоря, комплексная. Написав ее в виде $a = be^{ia}$ с вещественными b и a , мы видим, что поскольку a умножается на $e^{-i\omega t}$, то, выбирая соответствующим образом начало отсчета времени, мы можем придать фазе a любое значение. Выберем ее так, чтобы a было вещественно. Тогда, отделяя в $\dot{x} + i\dot{y}$ мнимую и вещественную части, находим:

$$\dot{x} = a \cos \omega t + c \frac{E_y}{H}, \quad \dot{y} = -a \sin \omega t. \quad (22,3)$$

При этом в момент времени $t = 0$ скорость направлена по оси x . Мы видим, что компоненты скорости частицы являются перио-

дическими функциями времени; их средние значения равны

$$\bar{x} = \frac{cE_y}{H}, \quad \bar{y} = 0.$$

Эту среднюю скорость движения заряда в скрещенных электрическом и магнитном полях часто называют скоростью электрического дрейфа. Ее направление перпендикулярно к обоим полям и не зависит от знака заряда. В векторном виде ее можно записать как

$$\bar{v} = \frac{c [EH]}{H^2}. \quad (22,4)$$

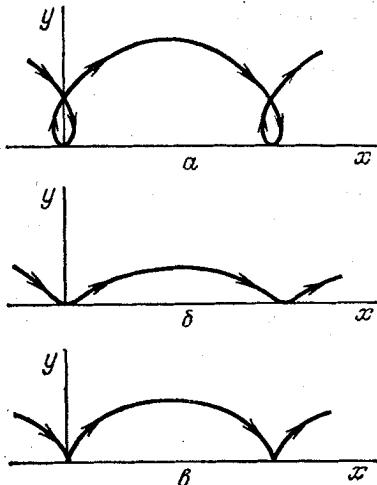


Рис. 6

Все формулы этого параграфа применимы, если скорость частицы мала по сравнению со скоростью света; мы видим, что для этого требуется, в частности, чтобы электрическое и магнитное поля удовлетворяли условию

$$\frac{E_y}{H} \ll 1, \quad (22,5)$$

абсолютные же величины E_y и H могут быть произвольными.

Интегрируя еще раз уравнения (22,3) и выбирая постоянные интегрирования так, чтобы при $t = 0$ было $x = y = 0$, получаем:

$$x = \frac{a}{\omega} \sin \omega t + \frac{cE_y}{H} t, \quad (22,6)$$

$$y = \frac{a}{\omega} (\cos \omega t - 1).$$

Рассматриваемые как параметрические уравнения кривой, эти уравнения определяют собой так называемую трохоиду. В зависимости от того, больше или меньше абсолютная величина a , чем абсолютная величина cE_y/H , проекция траектории частицы на плоскость xy имеет вид, изображенный соответственно на рис. 6, а и рис. 6, б.

Если $a = -cE_y/H$, то (22,6) переходит в

$$x = \frac{cE_y}{\omega H} (\omega t - \sin \omega t), \quad (22,7)$$

$$y = \frac{cE_y}{\omega H} (1 - \cos \omega t),$$

т. е. проекция траектории на плоскость xy является циклоидой (рис. 6, б).

Задачи

1. Определить релятивистское движение заряда в параллельных однородных электрическом и магнитном полях.

Решение. Магнитное поле не влияет на движение вдоль совместного направления \mathbf{E} и \mathbf{H} (ось z), которое происходит, следовательно, под действием одного лишь электрического поля; поэтому согласно § 20 находим:

$$z = \frac{\mathcal{E}_{\text{кин}}}{eE}, \quad \mathcal{E}_{\text{кин}} = \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2}.$$

Для движения в плоскости xy имеем уравнения:

$$\dot{p}_x = \frac{e}{c} Hv_y, \quad \dot{p}_y = -\frac{e}{c} Hv_x,$$

или

$$\frac{d}{dt}(p_x + ip_y) = -i \frac{eH}{c} (v_x + iv_y) = -\frac{ieHc}{\mathcal{E}_{\text{кин}}} (p_x + ip_y).$$

Отсюда

$$p_x + ip_y = p_t e^{-i\varphi},$$

где p_t — постоянное значение проекции импульса на плоскость xy , а вспомогательная величина φ введена согласно соотношению

$$d\varphi = eHc \frac{dt}{\mathcal{E}_{\text{кин}}},$$

откуда

$$ct = \frac{\mathcal{E}_0}{eE} \operatorname{sh} \frac{E}{H} \varphi. \quad (1)$$

Далее имеем:

$$p_x + ip_y = p_t e^{-i\varphi} = \frac{\mathcal{E}_{\text{кин}}}{c^2} (\dot{x} + i\dot{y}) = \frac{eH}{c} \frac{d(x + iy)}{d\varphi},$$

откуда

$$x = \frac{cp_t}{eH} \sin \varphi, \quad y = \frac{cp_t}{eH} \cos \varphi. \quad (2)$$

Формулы (1—2) вместе с формулой

$$z = \frac{\mathcal{E}_0}{eE} \operatorname{ch} \frac{E}{H} \varphi \quad (3)$$

определяют в параметрическом виде движение частицы. Траектория представляет собой винтовую линию с радиусом cp_t/eH и монотонно возрастающим шагом, по которой частица движется с убывающей угловой скоростью $\dot{\varphi} = eHc/\mathcal{E}_{\text{кин}}$ и стремящейся к c скоростью вдоль оси z .

2. Определить релятивистское движение заряда во взаимно перпендикулярных и равных по величине электрическом и магнитном полях¹⁾.

Решение. Выбирая ось z вдоль направления \mathbf{H} , а ось y — в направлении \mathbf{E} и полагая $E = H$, напишем уравнения движения:

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{e}{c} Ev_y, \quad \frac{dp_y}{dt} = eE \left(1 - \frac{v_x}{c}\right), \quad \frac{dp_z}{dt} = 0$$

¹⁾ Задача о движении во взаимно перпендикулярных, но не одинаковых по величине полях \mathbf{E} и \mathbf{H} надлежащим преобразованием системы отсчета сводится к задаче о движении в чисто электрическом или чисто магнитном поле (см. § 25).

и, как их следствие, уравнение (17,7):

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{кин}}}{dt} = eEv_y.$$

Из этих уравнений имеем:

$$p_z = \text{const}, \quad \mathcal{E}_{\text{кин}} - cp_x = \text{const} = a.$$

Используя также равенство

$$\mathcal{E}_{\text{кин}}^2 - c^2 p_x^2 = (\mathcal{E}_{\text{кин}} + cp_x)(\mathcal{E}_{\text{кин}} - cp_x) = c^2 p_y^2 + e^2$$

(где $e^2 = m^2 c^4 + c^2 p_z^2 = \text{const}$), находим:

$$\mathcal{E}_{\text{кин}} + cp_x = \frac{1}{a} (c^2 p_y^2 + e^2),$$

и затем:

$$\mathcal{E}_{\text{кин}} = \frac{a}{2} + \frac{c^2 p_y^2 + e^2}{2a},$$

$$p_x = -\frac{a}{2c} + \frac{c^2 p_y^2 + e^2}{2ac}.$$

Далее пишем:

$$\frac{dp_y}{dt} = eE \left(\mathcal{E}_{\text{кин}} - \frac{\mathcal{E}_{\text{кин}} p_x}{c} \right) = eE (\mathcal{E}_{\text{кин}} - cp_x) = eEa,$$

откуда

$$2eEt = \left(1 + \frac{e^2}{a^2} \right) p_y + \frac{c^2}{3a^2} p_y^3. \quad (1)$$

Для определения траектории в уравнениях

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c^2 p_x}{\mathcal{E}_{\text{кин}}}, \dots$$

переходим к переменной p_y согласно $dt = \mathcal{E}_{\text{кин}} dp_y / eEa$, после чего интегрирование приводит к формулам

$$\begin{aligned} x &= \frac{c}{2eE} \left(-1 + \frac{e^2}{a^2} \right) p_y + \frac{c^3}{6a^2 e E} p_y^3, \\ y &= \frac{c^2}{2aeE} p_y^2, \quad z = \frac{p_z c^2}{eEa} p_y. \end{aligned} \quad (2)$$

Формулы (1—2) полностью определяют в параметрическом виде (параметр p_y) движение частицы. Обратим внимание на то, что наиболее быстро возрастает скорость движения в направлении, перпендикулярном E и H (ось x).

3. Определить скорость дрейфа ведущего центра орбиты нерелятивистской заряженной частицы в квазиоднородном постоянном магнитном поле (H. Alfvén, 1940).

Решение. Предположим сначала, что частица движется по круговой орбите, т. е. ее скорость не имеет продольной (вдоль поля) составляющей. Представим уравнение траектории частицы в виде $\mathbf{r} = \mathbf{R}(t) + \xi(t)$, где $\mathbf{R}(t)$ — радиус-вектор ведущего центра (медленно меняющаяся функция времени), а $\xi(t)$ — быстро осциллирующая величина, изображающая вращательное дви-

жение вокруг ведущего центра. Усредним действующую на частицу силу $\frac{e}{c} [\dot{\mathbf{r}} \mathbf{H}(\mathbf{r})]$ по периоду осцилляционного (кругового) движения (ср. I § 30). Входящую в нее функцию $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ разложим по степеням ξ :

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}(\mathbf{R}) + (\xi \nabla) \mathbf{H}(\mathbf{R}).$$

При усреднении члены первого порядка по осциллирующей величине $\xi(t)$ обращаются в нуль, а член второго порядка приводит к появлению дополнительной силы

$$\mathbf{f} = \frac{\dot{e}}{c} [\overline{\xi} (\xi \nabla) \mathbf{H}].$$

Для кругового движения

$$\xi = \omega [\xi \mathbf{n}], \quad \xi = \frac{v_{\perp}}{\omega},$$

где \mathbf{n} — единичный вектор в направлении \mathbf{H} ; частота $\omega = eH/mc$; v_{\perp} — скорость частицы в ее круговом движении. Среднее значение произведений компонент вектора ξ , вращающегося в плоскости (перпендикулярной к \mathbf{n}):

$$\overline{\xi_a \xi_b} = \frac{1}{2} \xi^2 \delta_{ab},$$

где δ_{ab} — единичный тензор в этой плоскости. В результате получим:

$$\mathbf{f} = - \frac{mv_{\perp}^2}{2H} [[\mathbf{n} \nabla] \mathbf{H}].$$

В силу уравнений $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$, $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$, которым удовлетворяет постоянное поле $\mathbf{H}(\mathbf{R})$, имеем:

$$[[\mathbf{n} \nabla] \mathbf{H}] = - \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{H} + (\mathbf{n} \nabla) \mathbf{H} + [\mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{H}] = (\mathbf{n} \nabla) \mathbf{H} = H (\mathbf{n} \nabla) \mathbf{n} + \mathbf{n} (n \nabla H).$$

Нас интересует поперечная (по отношению к \mathbf{n}) сила, приводящая к смещению орбиты; она равна

$$\mathbf{f} = - \frac{mv_{\perp}^2}{2} (\mathbf{n} \nabla) \mathbf{n} = \frac{mv_{\perp}^2}{2\rho} \mathbf{v},$$

где ρ — радиус кривизны силовой линии поля в данной точке, а \mathbf{v} — единичный вектор, направленный от центра кривизны к этой точке.

Случай, когда частица обладает также и продольной (вдоль \mathbf{n}) скоростью v_{\parallel} , сводится к предыдущему, если перейти к системе отсчета, вращающейся вокруг мгновенного центра кривизны силовой линии (траектории ведущего центра) с угловой скоростью v_{\parallel}/ρ . В этой системе частица не имеет продольной скорости, но появляется дополнительная поперечная сила — центробежная сила, равная mv_{\parallel}^2/ρ . Таким образом, полная поперечная сила

$$\mathbf{f}_{\perp} = \mathbf{v} \frac{m}{\rho} \left(v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right).$$

Эта сила эквивалентна постоянному электрическому полю с напряженностью \mathbf{f}_{\perp}/e . Согласно (22,4) она вызывает дрейф ведущего центра орбиты со скоростью

$$\mathbf{v}_d = \frac{1}{\omega \rho} \left(v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right) [\mathbf{v} \mathbf{n}].$$

Знак этой скорости зависит от знака заряда.