§ 23. Тензор электромагнитного поля

В § 17 мы вывели уравнения движения заряда в поле, исходя из функции Лагранжа (16,4), написанной в трехмерном виде. Выведем теперь те же уравнения непосредственно из действия (16,1), написанного в четырехмерных обозначениях.

Принцип наименьшего действия гласит

$$\delta S = \delta \int_a^b \left(-mc\, ds - \frac{e}{c} A_i\, dx^i \right) = 0. \tag{23,1}$$

Замечая, что $ds = \sqrt{dx_i\, dx^i}$, находим (пределы интегрирования a и b мы будем ниже для краткости опускать):

$$\delta S = -\int \left(mc \frac{dx_i\, d\delta x^i}{ds} + \frac{e}{c} A_i\, d\delta x^i + \frac{e}{c} \delta A_i\, dx^i \right) = 0.$$

Первые два члена в подынтегральном выражении проинтегрируем по частям. Кроме того, в первом члене введем 4-скорость $dx_i/ds = u_i$. Тогда

$$\int \left(mc\, du_i\, \delta x^i + \frac{e}{c} \delta x^i\, dA_i - \frac{e}{c} \delta A_i\, dx^i \right) - \left(mcu_i + \frac{e}{c} A_i \right) \delta x^i \Big| = 0. \tag{23,2}$$

Второй член этого равенства равен нулю, так как интеграл варьируется при заданных значениях координат на пределах. Далее,

$$\delta A_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \delta x^k, \quad dA_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} dx^k,$$

и поэтому

$$\int \left(mc\, du_i\, \delta x^i + \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \delta x^i\, dx^k - \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} dx^i\, \delta x^k \right) = 0.$$

Напишем в первом члене $du_i = \frac{du_i}{ds} ds$, во втором и третьем $dx^i = u^i\, ds$. Кроме того, в третьем члене поменяем местами индексы i и k (это ничего не изменит, так как по значкам i и k производится суммирование). Тогда

$$\int \left[mc \frac{du_i}{ds} - \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) u^k \right] \delta x^i\, ds = 0.$$

Ввиду произвольности δx^i отсюда следует, что подынтегральное выражение равно нулю:

$$mc \frac{du_i}{ds} - \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) u^k = 0.$$

Введем обозначение

$$F_{ik}=\frac{\partial A_k}{\partial x^i}-\frac{\partial A_i}{\partial x^k}; \tag{23,3}$$

этот антисимметричный тензор называется *тензором электромагнитного поля.* Тогда полученное уравнение напишется в виде

$$mc\frac{du^i}{ds}=\frac{e}{c}F^{ik}u_k. \tag{23,4}$$

Это — уравнение движения заряда в четырехмерной форме.

Смысл отдельных компонент тензора F_{ik} легко выяснить, подставив значения $A_i=(\varphi, -\mathbf{A})$ в определение (23,3). Результат можно записать в виде таблицы, в которой индекс $i=0$, 1, 2, 3 нумерует строки, а индекс k — столбцы:

$$F_{ik}=\begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}, \quad F^{ik}=\begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{23,5}$$

Короче, можно написать (см. § 6):

$$F_{ik}=(\mathbf{E}, \mathbf{H}), \quad F^{ik}=(-\mathbf{E}, \mathbf{H}).$$

Таким образом, компоненты напряженностей электрического и магнитного полей являются компонентами одного 4-тензора электромагнитного поля.

Переходя к трехмерным обозначениям, легко убедиться в том, что три пространственные компоненты ($i=1$, 2, 3) уравнения (23,4) тождественны с векторным уравнением движения (17,5), а временная компонента ($i=0$) — с уравнением работы (17,7). Последнее есть следствие уравнения движения; тот факт, что из четырех уравнений (23,4) только три независимы, можно легко обнаружить также и непосредственно, умножив обе стороны (23,4) на u^i. Тогда левая сторона равенства обратится в нуль ввиду ортогональности 4-векторов u^i и du_i/ds, а правая сторона — ввиду антисимметричности тензора F_{ik}.

Если рассматривать в вариации δS только истинные траектории, то первый член в (23,2) тождественно обратится в нуль. Тогда второй член, в котором верхний предел рассматривается как переменный, дает дифференциал действия как функции координат. Таким образом,

$$\delta S=-\left(mcu_i+\frac{e}{c}A_i\right)\delta x^i. \tag{23,6}$$

Отсюда

$$-\frac{\partial S}{\partial x^i}=mcu_i+\frac{e}{c}A_i=p_i+\frac{e}{c}A_i. \tag{23,7}$$

4-вектор — $\partial S/\partial x^i$ есть 4-вектор обобщенного импульса частицы P_i. Подставляя значения компонент p_i и A_i, найдем, что

$$P^i = \left(\frac{\mathscr{E}_{\text{кин}} + e\varphi}{c},\ \mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right). \tag{23,8}$$

Как и следовало, пространственные компоненты 4-вектора P_i образуют трехмерный вектор обобщенного импульса (16,5), а временная компонента есть $\mathscr{E}/c$, где $\mathscr{E}$ — полная энергия заряда в поле.

§ 24. Преобразование Лоренца для поля

Напишем формулы преобразования для поля, т. е. формулы, по которым можно определить поле в одной инерциальной системе отсчета, зная это же поле в другой системе.

Формулы преобразования для потенциалов находятся непосредственно из общих формул преобразования 4-вектора (6,1). Помня, что $A^i = (\varphi, \mathbf{A})$, находим:

$$\varphi = \frac{\varphi' + \frac{V}{c}A'_x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\quad A_x = \frac{A'_x + \frac{V}{c}\varphi'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\quad A_y = A'_y,\quad A_z = A'_z. \tag{24,1}$$

Формулы преобразования для антисимметричного 4-тензора второго ранга (каковым является тензор F^{ik}) найдены в задаче 2 § 6: компоненты F^{23} и F^{01} не меняются при преобразовании, а компоненты F^{02}, F^{03} и F^{12}, F^{13} преобразуются соответственно как x^0 и x^1. Выразив компоненты тензора F^{ik} через компоненты полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ согласно (23,5), получим следующие формулы преобразования для электрического поля:

$$E_x = E'_x,\quad E_y = \frac{E'_y + \frac{V}{c}H'_z}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\quad E_z = \frac{E'_z - \frac{V}{c}H'_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \tag{24,2}$$

и для магнитного поля:

$$H_x = H'_x,\quad H_y = \frac{H'_y - \frac{V}{c}E'_z}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\quad H_z = \frac{H'_z + \frac{V}{c}E'_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \tag{24,3}$$

Таким образом, электрическое и магнитное поля, как и большинство физических величин, относительны, т. е. их свойства различны в разных системах отсчета. В частности, электрическое или магнитное поле может быть равно нулю в одной системе отсчета и в то же время присутствовать в другой системе.