Формулы преобразования (24,2—3) значительно упрощаются для случая $V \ll c$. С точностью до членов порядка V/c имеем:

$$E_x = E'_x, \quad E_y = E'_y + \frac{V}{c} H'_z, \quad E_z = E'_z - \frac{V}{c} H'_y;$$

$$H_x = H'_x, \quad H_y = H'_y - \frac{V}{c} E'_z, \quad H_z = H'_z + \frac{V}{c} E'_y.$$

Эти формулы могут быть написаны в векторном виде:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' + \frac{1}{c}[\mathbf{H}'\mathbf{V}], \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}' - \frac{1}{c}[\mathbf{E}'\mathbf{V}]. \tag{24,4}$$

Формулы обратного преобразования от K' к K получаются из (24,2—4) перестановкой штриха и изменением знака у V.

Если в системе K' магнитное поле $\mathbf{H}' = 0$, то, согласно (24,2—3), между электрическим и магнитным полями в системе K существует соотношение

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c}[\mathbf{V}\mathbf{E}]. \tag{24,5}$$

Если же в K' поле $\mathbf{E}' = 0$, то в системе K

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}[\mathbf{V}\mathbf{H}]. \tag{24,6}$$

В обоих случаях, следовательно, в системе K магнитные и электрические поля взаимно перпендикулярны.

Эти формулы имеют, разумеется, и обратный смысл: если в некоторой системе отсчета K поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ взаимно перпендикулярны (но не равны по величине), то существует такая система K', в которой поле чисто электрическое или чисто магнитное. Скорость $\mathbf{V}$ этой системы (по отношению к K) может быть выбрана перпендикулярной к $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, тогда по величине она равна в первом случае cH/E (причем должно быть $H < E$), а во втором случае cE/H (причем $E < H$).

§ 25. Инварианты поля

Из векторов напряженностей электрического и магнитного полей можно составить инвариантные величины, остающиеся неизменными при преобразованиях от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Вид этих инвариантов легко найти исходя из четырехмерного представления поля с помощью антисимметричного 4-тензора F^{ik}. Очевидно, что из компонент этого тензора можно составить следующие инвариантные величины:

$$F_{ik}F^{ik} = \text{inv}, \tag{25,1}$$

$$e^{iklm}F_{ik}F_{lm} = \text{inv}, \tag{25,2}$$

где e^{iklm} — совершенно антисимметричный единичный тензор (см. § 6). Первая из этих величин — истинный скаляр, а вторая — псевдоскаляр (произведение тензора F^{ik} на дуальный ему тензор)[1].

Выражая компоненты F^{ik} через компоненты **E** и **H** согласно (23,5), легко убедиться в том, что в трехмерной форме эти инварианты имеют вид

$$H^2 - E^2 = \text{inv}, \tag{25,3}$$

$$\mathbf{EH} = \text{inv}. \tag{25,4}$$

Псевдоскалярность второго из них очевидна из того, что он представляет собой произведение полярного вектора **E** на аксиальный вектор **H** (квадрат же $(\mathbf{EH})^2$ будет истинным скаляром).

Из инвариантности приведенных двух выражений вытекают следующие выводы. Если в какой-нибудь системе отсчета электрическое и магнитное поля взаимно перпендикулярны, т. е. $\mathbf{EH} = 0$, то они перпендикулярны и во всякой другой инерциальной системе отсчета. Если в какой-нибудь системе отсчета абсолютные величины **E** и **H** равны друг другу, то они одинаковы и в любой другой системе.

Имеют, очевидно, место также и следующие неравенства. Если в какой-нибудь системе отсчета $E > H$ (или $E < H$), то и во всякой другой системе будет $E > H$ (или $E < H$). Если в какой-либо системе отсчета векторы **E** и **H** образуют острый (или тупой) угол, то они будут образовывать острый (или тупой) угол и во всякой другой системе.

Преобразованием Лоренца можно всегда достичь того, чтобы **E** и **H** получили любые значения, удовлетворяющие только условию, чтобы $E^2 - H^2$ и $\mathbf{EH}$ имели заданные определенные значения. В частности, можно найти такую инерциальную систему отсчета, в которой электрическое и магнитное поля в данной точке параллельны друг другу. В этой системе $\mathbf{EH} = EH$, и из двух уравнений

$$E^2 - H^2 = E_0^2 - H_0^2, \quad EH = \mathbf{E}_0\mathbf{H}_0$$

можно найти значения **E** и **H** в этой системе отсчета ($\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$ — электрическое и магнитное поля в исходной системе отсчета).

---

[1]) Отметим также, что псевдоскаляр (25,2) может быть представлен в виде 4-дивергенции:

$$e^{iklm}F_{ik}F_{lm} = 4\frac{\partial}{\partial x^l}\left(e^{iklm}A_k\frac{\partial}{\partial x^l}A_m\right),$$

в чем легко убедиться, учитывая антисимметричность e^{iklm}.

Исключением является случай, когда оба инварианта равны нулю. В этом случае **E** и **H** во всех системах отсчета равны по величине и взаимно перпендикулярны по направлению.

Если лишь $\mathbf{EH}=0$, то можно найти такую систему отсчета, в которой $\mathbf{E}=0$ или $\mathbf{H}=0$ (смотря по тому $E^2-H^2<$ или >0), т. е. поле чисто магнитное или чисто электрическое; наоборот, если в какой-нибудь системе отсчета $\mathbf{E}=0$ или $\mathbf{H}=0$, то во всякой другой системе они будут взаимно перпендикулярны в соответствии со сказанным в конце предыдущего параграфа.

Изложим еще и другой способ подхода к вопросу об инвариантах антисимметричного 4-тензора. Этот способ делает очевидным единственность двух независимых инвариантов (25,3—4) и в то же время выявляет некоторые поучительные математические свойства преобразований Лоренца в применении к 4-тензору.

Рассмотрим комплексный вектор

$$\mathbf{F}=\mathbf{E}+i\mathbf{H}. \tag{25,5}$$

Используя формулы (24,2—3), легко видеть, что преобразование Лоренца (вдоль оси x) для этого вектора имеет вид

$$\begin{gathered} F_x=F'_x,\quad F_y=F'_y\operatorname{ch}\varphi-iF'_z\operatorname{sh}\varphi=F'_y\cos i\varphi-F'_z\sin i\varphi,\\ F_z=F'_z\cos i\varphi+F'_y\sin i\varphi,\quad \operatorname{th}\varphi=\frac{V}{c}. \end{gathered} \tag{25,6}$$

Мы видим, что вращение в плоскости xt 4-пространства (каковым и является рассматриваемое преобразование Лоренца) для вектора **F** эквивалентно вращению на мнимый угол в плоскости yz трехмерного пространства. Совокупность же всех возможных поворотов в 4-пространстве (включающая в себя также и простые повороты осей x, y, z) эквивалентна совокупности всех возможных поворотов на комплексные углы в трехмерном пространстве (шести углам поворота в 4-пространстве соответствуют три комплексных угла поворота трехмерной системы).

Единственным инвариантом вектора по отношению к поворотам является его квадрат $\mathbf{F}^2=E^2-H^2+2i\mathbf{EH}$. Поэтому вещественные величины E^2-H^2 и $\mathbf{EH}$ являются единственными инвариантами тензора F_{ik}.

Если $\mathbf{F}^2\neq 0$, то вектор **F** можно представить в виде $\mathbf{F}=a\mathbf{n}$, где $\mathbf{n}$ — единичный ($\mathbf{n}^2=1$) комплексный вектор. Путем надлежащего комплексного поворота можно направить $\mathbf{n}$ вдоль одной из координатных осей; при этом, очевидно, $\mathbf{n}$ станет вещественным и тем самым определит направления обоих векторов **E** и **H**: $\mathbf{F}=(E+iH)\mathbf{n}$. Другими словами, векторы **E** и **H** станут параллельными друг другу.

Задача

Определить скорость системы отсчета, в которой электрическое и магнитное поля параллельны.

Решение. Систем отсчета K', удовлетворяющих поставленному условию, существует бесконечное множество: если найдена одна из них, то тем же свойством будет обладать и любая другая система, движущаяся относительно первой со скоростью, направленной вдоль общего направления полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Поэтому достаточно определить ту из этих систем, скорость которой перпендикулярна к обоим полям. Выбирая направление скорости в качестве оси x и воспользовавшись тем, что в системе K' поля $E'_x = H'_x = 0$, $E'_y H'_z - E'_z H'_y = 0$, получим с помощью формул (24,2—3) для скорости $\mathbf{V}$ системы K' относительно исходной системы следующее уравнение:

$$\frac{\mathbf{V}/c}{1 + V^2/c^2} = \frac{[\mathbf{EH}]}{E^2 + H^2}$$

(из двух корней квадратного уравнения должен, разумеется, быть выбран тот, для которого $V < c$).