

ГЛАВА IV

УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

§ 26. Первая пара уравнений Максвелла

Из выражений

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi$$

легко получить уравнения, содержащие только \mathbf{E} и \mathbf{H} . Для этого определим $\operatorname{rot} \mathbf{E}$:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{A} - \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi.$$

Но ротор всякого градиента равен нулю; следовательно,

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (26,1)$$

Взяв дивергенцию от обеих частей уравнения $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{H}$ и помня, что дивергенция всякого ротора равна нулю, находим

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \quad (26,2)$$

Уравнения (26,1—2) составляют первую пару *уравнений Максвелла*¹). Заметим, что эти два уравнения еще не определяют вполне свойства поля. Это видно уже из того, что они определяют изменение магнитного поля со временем (производную $\partial \mathbf{H} / \partial t$), но не определяют производной $\partial \mathbf{E} / \partial t$.

Уравнения (26,1—2) можно написать в интегральной форме. Согласно теореме Гаусса

$$\int \operatorname{div} \mathbf{H} dV = \oint \mathbf{H} d\mathbf{l},$$

где интеграл справа берется по всей замкнутой поверхности, охватывающей объем, по которому взят интеграл слева. На основании (26,2) имеем:

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = 0. \quad (26,3)$$

Интеграл от вектора по некоторой поверхности называется *потоком вектора* через эту поверхность. Таким образом, поток

¹) Уравнения Максвелла — основные уравнения электродинамики — были впервые сформулированы Дж. Максвеллом в 1860-х годах.

магнитного поля через всякую замкнутую поверхность равен нулю.

Согласно теореме Стокса

$$\int \operatorname{rot} \mathbf{E} d\mathbf{l} = \oint \mathbf{E} d\mathbf{l},$$

где интеграл справа берется по замкнутому контуру, огибающему поверхность, по которой интегрируется слева. Из (26,1) находим, интегрируя обе части по некоторой поверхности:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{H} d\mathbf{l}. \quad (26,4)$$

Интеграл вектора по замкнутому контуру называется *циркуляцией* этого вектора по контуру. Циркуляцию электрического поля называют также *электродвижущей силой* в данном контуре. Таким образом, электродвижущая сила в некотором контуре равна взятой с обратным знаком производной по времени от потока магнитного поля через поверхность, ограниченную этим контуром.

Уравнения Максвелла (26,1—2) можно написать и в четырехмерных обозначениях. Исходя из определения тензора электромагнитного поля

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k},$$

легко убедиться, что

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0. \quad (26,5)$$

Выражение, стоящее в левой стороне равенства, представляет собой тензор третьего ранга, антисимметричный по всем трем индексам. Его компоненты не равны тождественно нулю лишь при $i \neq k \neq l$. Всего, таким образом, имеется четыре различных уравнения, которые, как легко убедиться подстановкой выражений (23,5), совпадают с уравнениями (26,1—2).

Антисимметричному 4-тензору третьего ранга можно привести в соответствие дуальный ему 4-вектор, получающийся умножением тензора на e^{iklm} и упрощением по трем парам индексов (см. § 6). Таким образом, (26,5) можно написать в виде

$$e^{iklm} \frac{\partial F_{lm}}{\partial x^k} = 0, \quad (26,6)$$

явно выражающим тот факт, что здесь имеется всего четыре независимых уравнения.