§ 27. Действие для электромагнитного поля

Действие S для всей системы, состоящей из электромагнитного поля вместе с находящимися в нем частицами, должно состоять из трех частей:

$$S = S_f + S_m + S_{mf}. \tag{27,1}$$

S_m есть та часть действия, которая зависит только от свойств частиц, т. е. действие для свободных частиц. Для одной свободной частицы оно дается формулой (8,1). Если имеется несколько частиц, то их общее действие равно сумме действий для каждой частицы в отдельности. Таким образом,

$$S_m = -\sum mc \int ds. \tag{27,2}$$

S_{mf} есть та часть действия, которая обусловлена взаимодействием между частицами и полем. Согласно § 16 имеем для системы частиц:

$$S_{mf} = -\sum \frac{e}{c} \int A_k \, dx^k. \tag{27,3}$$

В каждом из членов этой суммы A_k есть потенциал поля в той точке пространства и времени, в которой находится соответствующая частица. Сумма $S_m + S_{mf}$ — уже известное нам действие (16,1) для зарядов в поле.

Наконец, S_f есть та часть действия, которая зависит только от свойств самого поля, т. е. S_f — действие для поля в отсутствие зарядов. До тех пор, пока мы интересовались только движением зарядов в заданном электромагнитном поле, S_f, как не зависящее от частиц, нас не интересовало, так как этот член не мог повлиять на уравнения движения частицы. Он становится, однако, необходимым, когда мы хотим найти уравнения, определяющие само поле. Этому соответствует то обстоятельство, что из части $S_m + S_{mf}$ действия мы нашли только два уравнения, (26,1—2), которые еще недостаточны для полного определения поля.

Для установления вида действия поля S_f мы будем исходить из следующего весьма важного свойства электромагнитных полей. Как показывает опыт, электромагнитное поле подчиняется так называемому *принципу суперпозиции*: поле, создаваемое системой зарядов, представляет собой результат простого сложения полей, которые создаются каждым из зарядов в отдельности. Это значит, что напряженности результирующего поля в каждой точке равны сумме (векторной) напряженностей в этой точке каждого из полей в отдельности.

Всякое решение уравнений поля является полем, которое может быть осуществлено в природе. Согласно принципу суперпозиции сумма любых таких полей тоже должна быть полем,

которое может быть осуществлено в природе, т. е. должно удовлетворять уравнениям поля.

Как известно, линейные дифференциальные уравнения как раз отличаются тем свойством, что сумма любых его решений тоже является решением. Следовательно, уравнения для поля должны быть линейными дифференциальными уравнениями.

Из сказанного следует, что под знаком интеграла в действии S_f должно стоять выражение, квадратичное по полю. Только в этом случае уравнения поля будут линейными, — уравнения поля получаются варьированием действия, а при варьировании степень подынтегрального выражения понижается на единицу.

В выражение для действия S_f не могут входить потенциалы поля, так как они не определены однозначно (в S_{mf} эта неоднозначность была не существенна). Поэтому S_f должно быть интегралом некоторой функции от тензора электромагнитного поля F_{ik}. Но действие должно быть скаляром и потому должно быть интегралом от некоторого скаляра. Таковым является лишь произведение $F_{ik}F^{ik}$ [1]).

Таким образом, S_f должно иметь вид

$$S_f = a \iint F_{ik}F^{ik}\, dV\, dt, \quad dV = dx\, dy\, dz,$$

где интеграл берется по координатам по всему пространству, а по времени — между двумя заданными моментами; a есть некоторая постоянная. Под интегралом стоит $F_{ik}F^{ik} = 2(H^2 - E^2)$. Поле $\mathbf{E}$ содержит производную $\partial\mathbf{A}/\partial t$. Но легко видеть, что $(\partial\mathbf{A}/\partial t)^2$ должно входить в действие с положительным знаком (а потому и E^2 с положительным знаком). Действительно, если бы $(\partial\mathbf{A}/\partial t)^2$ входило в S_f со знаком минус, то достаточно быстрым изменением потенциала со временем (в рассматриваемом итервале времени) всегда можно было бы сделать S_f отрицательной величиной со сколь угодно большим абсолютным значением; S_f не могло бы, следовательно, иметь минимума, как

---

[1]) Подынтегральная функция в S_f не должна содержать производных от F_{ik}, так как в функцию Лагранжа могут входить, помимо координат системы, только их первые производные по времени, а роль «координат» (т. е. переменных, по которым производится варьирование в принципе наименьшего действия) играют в этом случае потенциалы A_k поля; это аналогично тому, что в механике функция Лагранжа для механической системы содержит только координаты частиц и их первые производные по времени.

Что касается величины $e^{iklm}F_{ik}F_{lm}$ (§ 25), то она является (как было отмечено в примечании на стр. 92) полной 4-дивергенцией, и поэтому ее добавление в подынтегральное выражение в S_f вообще не отразилось бы на «уравнениях движения». Интересно, что тем самым эта величина исключается из действия уже независимо от того обстоятельства, что она представляет собой не истинный, а псевдоскаляр.

этого требует принцип наименьшего действия. Таким образом, a должно быть отрицательным.

Численное значение a зависит от выбора единиц для измерения поля. Заметим, что после выбора определенного значения a вместе с единицами для измерения поля определяются также и единицы для измерения всех остальных электромагнитных величин.

Мы будем в дальнейшем пользоваться так называемой *гауссовой системой единиц*; в этой системе a есть безразмерная величина, равная $-1/16\pi$ [1]).

Таким образом, действие для поля имеет вид

$$S_f = -\frac{1}{16\pi c}\int F_{ik}F^{ik}\,d\Omega, \quad d\Omega = c\,dt\,dx\,dy\,dz. \tag{27,4}$$

В трехмерном виде:

$$S_f = \frac{1}{8\pi}\iint (E^2 - H^2)\,dV\,dt. \tag{27,5}$$

Другими словами, функция Лагранжа электромагнитного поля

$$L_f = \frac{1}{8\pi}\int (E^2 - H^2)\,dV. \tag{27,6}$$

Действие для поля вместе с находящимися в нем зарядами имеет вид

$$S = -\sum\int mc\,ds - \sum\int \frac{e}{c}A_k\,dx^k - \frac{1}{16\pi c}\int F_{ik}F^{ik}\,d\Omega. \tag{27,7}$$

Подчеркнем, что теперь уже заряды отнюдь не считаются малыми, как при выводе уравнений движения заряда в заданном поле. Поэтому A_k и F_{ik} относятся к истинному полю, т. е. внешнему полю вместе с полем, созданным самими зарядами; A_k и F_{ik} зависят теперь от положения и скорости зарядов.

§ 28. Четырехмерный вектор тока

Вместо того чтобы рассматривать заряды как точечные, в целях математического удобства часто рассматривают заряд как распределенный в пространстве непрерывным образом. Тогда можно ввести *плотность заряда* ρ так, что $\rho\,dV$ есть заряд, находящийся в объеме dV; ρ есть, вообще говоря, функция от координат и времени. Интеграл от ρ по некоторому объему есть заряд, находящийся в этом объеме.

---

[1]) Наряду с гауссовой системой единиц пользуются также и так называемой системой Хевисайда, в которой $a = -1/4$. В этой системе единиц имеют более удобный вид уравнения поля (в них не входит тогда 4π), но зато 4π входит в закон Кулона. Напротив, в гауссовой системе единиц уравнения поля содержат 4π, а закон Кулона имеет простой вид.