этого требует принцип наименьшего действия. Таким образом, a должно быть отрицательным.

Численное значение a зависит от выбора единиц для измерения поля. Заметим, что после выбора определенного значения a вместе с единицами для измерения поля определяются также и единицы для измерения всех остальных электромагнитных величин.

Мы будем в дальнейшем пользоваться так называемой *гауссовой системой единиц*; в этой системе a есть безразмерная величина, равная $-1/16\pi$ [1]).

Таким образом, действие для поля имеет вид

$$S_f = -\frac{1}{16\pi c}\int F_{ik}F^{ik}\,d\Omega, \quad d\Omega = c\,dt\,dx\,dy\,dz. \tag{27,4}$$

В трехмерном виде:

$$S_f = \frac{1}{8\pi}\iint (E^2 - H^2)\,dV\,dt. \tag{27,5}$$

Другими словами, функция Лагранжа электромагнитного поля

$$L_f = \frac{1}{8\pi}\int (E^2 - H^2)\,dV. \tag{27,6}$$

Действие для поля вместе с находящимися в нем зарядами имеет вид

$$S = -\sum\int mc\,ds - \sum\int \frac{e}{c}A_k\,dx^k - \frac{1}{16\pi c}\int F_{ik}F^{ik}\,d\Omega. \tag{27,7}$$

Подчеркнем, что теперь уже заряды отнюдь не считаются малыми, как при выводе уравнений движения заряда в заданном поле. Поэтому A_k и F_{ik} относятся к истинному полю, т. е. внешнему полю вместе с полем, созданным самими зарядами; A_k и F_{ik} зависят теперь от положения и скорости зарядов.

§ 28. Четырехмерный вектор тока

Вместо того чтобы рассматривать заряды как точечные, в целях математического удобства часто рассматривают заряд как распределенный в пространстве непрерывным образом. Тогда можно ввести *плотность заряда* ρ так, что $\rho\,dV$ есть заряд, находящийся в объеме dV; ρ есть, вообще говоря, функция от координат и времени. Интеграл от ρ по некоторому объему есть заряд, находящийся в этом объеме.

---

[1]) Наряду с гауссовой системой единиц пользуются также и так называемой системой Хевисайда, в которой $a = -1/4$. В этой системе единиц имеют более удобный вид уравнения поля (в них не входит тогда 4π), но зато 4π входит в закон Кулона. Напротив, в гауссовой системе единиц уравнения поля содержат 4π, а закон Кулона имеет простой вид.

При этом надо помнить, что в действительности заряды являются точечными, так что плотность ρ равна нулю везде, кроме тех точек, где находятся точечные заряды, а интеграл $\int \rho\, dV$ должен быть равен сумме тех зарядов, которые находятся в данном объеме. Поэтому ρ можно написать с помощью δ-функций [1]) в следующем виде:

$$\rho = \sum_a e_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a), \tag{28,1}$$

где сумма берется по всем имеющимся зарядам, а $\mathbf{r}_a$ — радиус-вектор заряда e_a.

Заряд частицы есть, по самому своему определению, величина инвариантная, т. е. не зависящая от выбора системы от-

---

[1]) δ-функция $\delta(x)$ определяется следующим образом: $\delta(x) = 0$ при всех не равных нулю значениях x; при $x = 0$ $\delta(0) = \infty$, причем так, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, dx = 1. \tag{1}$$

Из этого определения вытекают следующие свойства: если $f(x)$ — любая непрерывная функция, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \delta(x - a)\, dx = f(a); \tag{2}$$

в частности,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \delta(x)\, dx = f(0) \tag{3}$$

(пределы интегрирования, разумеется, не обязательно должны быть $\pm\infty$; областью интегрирования может быть любая область, заключающая ту точку, в которой δ-функция не исчезает).

Смысл следующих равенств заключается в том, что их левая и правая части дают одинаковые результаты, если их применять в качестве множителей под знаком интегрирования:

$$\delta(-x) = \delta(x), \qquad \delta(ax) = \frac{1}{|a|}\, \delta(x). \tag{4}$$

Последнее равенство является частным случаем более общего соотношения

$$\delta[\varphi(x)] = \sum_i \frac{1}{|\varphi'(a_i)|}\, \delta(x - a_i), \tag{5}$$

где $\varphi(x)$ — однозначная функция (обратная ей функция не обязана быть однозначной), а a_i — корни уравнения $\varphi(x) = 0$.

Подобно тому как $\delta(x)$ определена для одной переменной x, можно ввести трехмерную δ-функцию $\delta(\mathbf{r})$, равную нулю везде, кроме начала трехмерной системы координат, и интеграл которой по всему пространству равен 1. Такую функцию можно, конечно, представить как произведение $\delta(x)\delta(y)\delta(z)$.

счета. Напротив, плотность ρ не есть инвариант, — инвариантом является лишь произведение $\rho\, dV$.

Умножим равенство $de = \rho\, dV$ с обеих сторон на dx^i:

$$de\, dx^i = \rho\, dV\, dx^i = \rho\, dV\, dt \frac{dx^i}{dt}.$$

Слева стоит 4-вектор (так как de есть скаляр, а dx^i — 4-вектор). Значит, и справа должен стоять 4-вектор. Но $dV\, dt$ есть скаляр, а потому $\rho \frac{dx^i}{dt}$ есть 4-вектор. Этот вектор (обозначим его через j^i) носит название 4-вектора *плотности тока*:

$$j^i = \rho \frac{dx^i}{dt}. \tag{28,2}$$

Его три пространственные компоненты образуют трехмерную плотность тока

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}; \tag{28,3}$$

$\mathbf{v}$ есть скорость заряда в данной точке. Временная же составляющая 4-вектора (28,2) есть $c\rho$. Таким образом,

$$j^i = (c\rho,\ \mathbf{j}). \tag{28,4}$$

Полный заряд, находящийся во всем пространстве, равен интегралу $\int \rho\, dV$ по всему пространству. Можно написать этот интеграл в четырехмерном виде:

$$\int \rho\, dV = \frac{1}{c} \int j^0\, dV = \frac{1}{c} \int j^i\, dS_i, \tag{28,5}$$

где интегрирование производится по всей четырехмерной гиперплоскости, перпендикулярной к оси x^0 (очевидно, что это и означает интегрирование по всему трехмерному пространству). Вообще интеграл $\frac{1}{c} \int j^i\, dS_i$, взятый по любой гиперповерхности, есть сумма зарядов, мировые линии которых пересекают эту гиперповерхность.

Введем 4-вектор тока в выражение (27,7) для действия и преобразуем второй член в этом выражении. Введя вместо точечных зарядов e непрерывное распределение с плотностью ρ, напишем этот член в виде

$$-\frac{1}{c} \int \rho A_i\, dx^i\, dV,$$

заменив сумму по зарядам интегралом по всему объему. Переписав его как

$$-\frac{1}{c} \int \rho \frac{dx^i}{dt} A_i\, dV\, dt,$$

мы видим, что этот член равен

$$-\frac{1}{c^2}\int A_i j^i\, d\Omega.$$

Таким образом, действие S принимает вид

$$S = -\sum\int mc\, ds - \frac{1}{c^2}\int A_i j^i\, d\Omega - \frac{1}{16\pi c}\int F_{ik}F^{ik}\, d\Omega. \quad (28,6)$$

§ 29. Уравнение непрерывности

Изменение со временем заряда, находящегося в некотором объеме, дается производной

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, dV.$$

С другой стороны, изменение за единицу времени определяется количеством заряда, выходящего за это время из данного объема наружу, или, наборот, входящего внутрь его. Количество заряда, проходящего за единицу времени через элемент $d\mathbf{f}$ поверхности, ограничивающей наш объем, равно $\rho\mathbf{v}\, d\mathbf{f}$, где $\mathbf{v}$ есть скорость заряда в той точке пространства, где находится элемент $d\mathbf{f}$. Вектор $d\mathbf{f}$ направлен, как это всегда принимается, по внешней нормали к поверхности, т. е. по нормали, направленной наружу от рассматриваемого объема. Поэтому $\rho\mathbf{v}\, d\mathbf{f}$ положительно, если заряд выходит из нашего объема, и отрицательно, если заряд входит в него. Полное количество заряда, выходящего в единицу времени из данного объема, есть, следовательно, $\oint \rho\mathbf{v}\, d\mathbf{f}$, где интеграл распространен по всей замкнутой поверхности, ограничивающей этот объем.

Из сравнения обоих полученных выражений находим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, dV = -\oint \rho\mathbf{v}\, d\mathbf{f}. \quad (29,1)$$

Справа поставлен знак минус, так как левая часть положительна, если полный заряд в данном объеме увеличивается. Уравнение (29,1), выражающее собой закон сохранения заряда, есть так называемое *уравнение непрерывности*, написанное в интегральном виде. Замечая, что $\rho\mathbf{v}$ есть плотность тока, можно переписать (29,1) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, dV = -\oint \mathbf{j}\, d\mathbf{f}. \quad (29,2)$$

Напишем это же уравнение в дифференциальном виде. Применив к правой части (29,2) теорему Гаусса

$$\oint \mathbf{j}\, d\mathbf{f} = \int \operatorname{div}\mathbf{j}\, dV,$$