мы видим, что этот член равен

$$-\frac{1}{c^2}\int A_i j^i\, d\Omega.$$

Таким образом, действие S принимает вид

$$S = -\sum\int mc\, ds - \frac{1}{c^2}\int A_i j^i\, d\Omega - \frac{1}{16\pi c}\int F_{ik}F^{ik}\, d\Omega. \quad (28,6)$$

§ 29. Уравнение непрерывности

Изменение со временем заряда, находящегося в некотором объеме, дается производной

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, dV.$$

С другой стороны, изменение за единицу времени определяется количеством заряда, выходящего за это время из данного объема наружу, или, наборот, входящего внутрь его. Количество заряда, проходящего за единицу времени через элемент $d\mathbf{f}$ поверхности, ограничивающей наш объем, равно $\rho\mathbf{v}\, d\mathbf{f}$, где $\mathbf{v}$ есть скорость заряда в той точке пространства, где находится элемент $d\mathbf{f}$. Вектор $d\mathbf{f}$ направлен, как это всегда принимается, по внешней нормали к поверхности, т. е. по нормали, направленной наружу от рассматриваемого объема. Поэтому $\rho\mathbf{v}\, d\mathbf{f}$ положительно, если заряд выходит из нашего объема, и отрицательно, если заряд входит в него. Полное количество заряда, выходящего в единицу времени из данного объема, есть, следовательно, $\oint \rho\mathbf{v}\, d\mathbf{f}$, где интеграл распространен по всей замкнутой поверхности, ограничивающей этот объем.

Из сравнения обоих полученных выражений находим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, dV = -\oint \rho\mathbf{v}\, d\mathbf{f}. \quad (29,1)$$

Справа поставлен знак минус, так как левая часть положительна, если полный заряд в данном объеме увеличивается. Уравнение (29,1), выражающее собой закон сохранения заряда, есть так называемое *уравнение непрерывности*, написанное в интегральном виде. Замечая, что $\rho\mathbf{v}$ есть плотность тока, можно переписать (29,1) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, dV = -\oint \mathbf{j}\, d\mathbf{f}. \quad (29,2)$$

Напишем это же уравнение в дифференциальном виде. Применив к правой части (29,2) теорему Гаусса

$$\oint \mathbf{j}\, d\mathbf{f} = \int \operatorname{div}\mathbf{j}\, dV,$$

находим:

$$\int \left(\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right) dV = 0.$$

Поскольку это равенство должно иметь место при интегрировании по любому объему, то подынтегральное выражение должно быть равно нулю:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{29,3}$$

Это и есть уравнение непрерывности в дифференциальном виде.

Легко убедиться в том, что выражение (28,1) для ρ в виде δ-функций автоматически удовлетворяет уравнению (29,3). Для простоты предположим, что имеется всего лишь один заряд, так что

$$\rho = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

Тогда ток

$$\mathbf{j} = e\mathbf{v}\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0),$$

где $\mathbf{v}$ — скорость заряда. Найдем производную $\partial\rho/\partial t$. При движении заряда меняются его координаты, т. е. меняется $\mathbf{r}_0$. Поэтому

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}_0}\frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial t}.$$

Но $\partial\mathbf{r}_0/\partial t$ есть не что иное, как скорость $\mathbf{v}$ заряда. Далее, поскольку ρ есть функция от $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$,

$$\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}_0} = -\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\mathbf{v}\operatorname{grad}\rho = -\operatorname{div}\rho\mathbf{v}$$

(скорость $\mathbf{v}$ заряда не зависит, конечно, от $\mathbf{r}$). Таким образом, мы приходим к уравнению (29,3).

В четырехмерной форме уравнение непрерывности (29,3) выражается равенством нулю 4-дивергенции 4-вектора тока:

$$\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0. \tag{29,4}$$

В предыдущем параграфе мы видели, что полный заряд, находящийся во всем пространстве, может быть написан в виде

$$\frac{1}{c}\int j^i\, dS_i,$$

где интегрирование производится по гиперплоскости $x^0 = \text{const}$. В другой момент времени полный заряд изобразится таким же интегралом, взятым по другой гиперплоскости, перпендикулярной к оси x^0. Легко проверить, что уравнение (29,4) действительно приводит к закону сохранения заряда, т. е. к тому, что интеграл $\int j^i\, dS_i$ одинаков, по какой бы гиперплоскости $x^0 = \text{const}$

мы ни интегрировали. Разность между интегралами $\int j^i dS_i$, взятыми по двум таким гиперплоскостям, можно написать в виде $\oint j^i dS_i$, где интеграл берется по всей замкнутой гиперповерхности, охватывающей 4-объем между двумя рассматриваемыми гиперплоскостями (этот интеграл отличается от искомой разности интегралом по бесконечно удаленной «боковой» гиперповерхности, который, однако, исчезает, так как на бесконечности нет зарядов). С помощью теоремы Гаусса (6,15) можно, преобразовав этот интеграл в интеграл по 4-объему между двумя гиперплоскостями, убедиться, что

$$\oint j^i dS_i = \int \frac{\partial j^i}{\partial x^i} d\Omega = 0, \tag{29,5}$$

что и требовалось доказать.

Приведенное доказательство остается, очевидно, в силе и для двух интегралов $\int j^i dS_i$, в которых интегрирование производится по любым двум бесконечным гиперповерхностям (а не только по гиперплоскостям $x^0 = \text{const}$), включающим в себя все (трехмерное) пространство. Отсюда видно, что интеграл $\frac{1}{c}\int j^i dS_i$ действительно имеет одно и то же значение (равное полному заряду в пространстве), по какой бы такой гиперповерхности ни производилось интегрирование.

Мы уже упоминали (см. примечание на стр. 76) о тесной связи между калибровочной инвариантностью уравнений электродинамики и законом сохранения заряда. Продемонстрируем ее еще раз на выражении действия в виде (28,6). При замене A_i на $A_i - \frac{\partial f}{\partial x^i}$ ко второму члену в (28,6) добавится интеграл

$$\frac{1}{c^2}\int j^i \frac{\partial f}{\partial x^i} d\Omega.$$

Именно сохранение заряда, выражаемое уравнением непрерывности (29,4), позволяет написать подынтегральное выражение в виде 4-дивергенции $\frac{\partial}{\partial x^i}(fj^i)$, после чего согласно теореме Гаусса интеграл по 4-объему преобразуется в интеграл по граничным гиперповерхностям; при варьировании действия эти интегралы выпадают и, таким образом, не отражаются на уравнениях движения.

§ 30. Вторая пара уравнений Максвелла

При нахождении уравнений поля из принципа наименьшего действия мы должны считать заданным движение зарядов и должны варьировать только потенциалы поля (играющие здесь