мы ни интегрировали. Разность между интегралами $\int j^i dS_i$, взятыми по двум таким гиперплоскостям, можно написать в виде $\oint j^i dS_i$, где интеграл берется по всей замкнутой гиперповерхности, охватывающей 4-объем между двумя рассматриваемыми гиперплоскостями (этот интеграл отличается от искомой разности интегралом по бесконечно удаленной «боковой» гиперповерхности, который, однако, исчезает, так как на бесконечности нет зарядов). С помощью теоремы Гаусса (6,15) можно, преобразовав этот интеграл в интеграл по 4-объему между двумя гиперплоскостями, убедиться, что

$$\oint j^i dS_i = \int \frac{\partial j^i}{\partial x^i} d\Omega = 0, \tag{29,5}$$

что и требовалось доказать.

Приведенное доказательство остается, очевидно, в силе и для двух интегралов $\int j^i dS_i$, в которых интегрирование производится по любым двум бесконечным гиперповерхностям (а не только по гиперплоскостям $x^0 = \text{const}$), включающим в себя все (трехмерное) пространство. Отсюда видно, что интеграл $\frac{1}{c}\int j^i dS_i$ действительно имеет одно и то же значение (равное полному заряду в пространстве), по какой бы такой гиперповерхности ни производилось интегрирование.

Мы уже упоминали (см. примечание на стр. 76) о тесной связи между калибровочной инвариантностью уравнений электродинамики и законом сохранения заряда. Продемонстрируем ее еще раз на выражении действия в виде (28,6). При замене A_i на $A_i - \frac{\partial f}{\partial x^i}$ ко второму члену в (28,6) добавится интеграл

$$\frac{1}{c^2}\int j^i \frac{\partial f}{\partial x^i} d\Omega.$$

Именно сохранение заряда, выражаемое уравнением непрерывности (29,4), позволяет написать подынтегральное выражение в виде 4-дивергенции $\frac{\partial}{\partial x^i}(fj^i)$, после чего согласно теореме Гаусса интеграл по 4-объему преобразуется в интеграл по граничным гиперповерхностям; при варьировании действия эти интегралы выпадают и, таким образом, не отражаются на уравнениях движения.

§ 30. Вторая пара уравнений Максвелла

При нахождении уравнений поля из принципа наименьшего действия мы должны считать заданным движение зарядов и должны варьировать только потенциалы поля (играющие здесь

роль «координат» системы); при нахождении уравнений движения мы, наоборот, считали поле заданным и варьировали траекторию частицы.

Поэтому вариация первого члена в (28,6) равна теперь нулю, а во втором не должен варьироваться ток j^i. Таким образом,

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int\left[\frac{1}{c}j^i\delta A_i + \frac{1}{8\pi}F^{ik}\delta F_{ik}\right]d\Omega = 0$$

(при варьировании во втором члене учтено, что $F^{ik}\delta F_{ik} \equiv \equiv F_{ik}\delta F^{ik}$). Подставляя

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k},$$

имеем:

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int\left\{\frac{1}{c}j^i\delta A_i + \frac{1}{8\pi}F^{ik}\frac{\partial}{\partial x^i}\delta A_k - \frac{1}{8\pi}F^{ik}\frac{\partial}{\partial x^k}\delta A_i\right\}d\Omega.$$

Во втором члене меняем местами индексы i и k, по которым производится суммирование, и, кроме того, заменяем F_{ki} на $-F_{ik}$. Тогда мы получим:

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int\left\{\frac{1}{c}j^i\delta A_i - \frac{1}{4\pi}F^{ik}\frac{\partial}{\partial x^k}\delta A_i\right\}d\Omega.$$

Второй из этих интегралов берем по частям, т. е. применяем теорему Гаусса:

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int\left\{\frac{1}{c}j^i + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k}\right\}\delta A_i\,d\Omega - \frac{1}{4\pi c}\int F^{ik}\delta A_i\,dS_k\Big|. \qquad (30,1)$$

Во втором члене мы должны взять его значение на пределах интегрирования. Пределами интегрирования по координатам является бесконечность, где поле исчезает. На пределах же интегрирования по времени, т. е. в заданные начальный и конечный моменты времени, вариация потенциалов равна нулю, так как по смыслу принципа наименьшего действия потенциалы в эти моменты заданы. Таким образом, второй член в (30,1) равен нулю, и мы находим:

$$\int\left(\frac{1}{c}j^i + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k}\right)\delta A_i\,d\Omega = 0.$$

Ввиду того, что по смыслу принципа наименьшего действия вариации δA_i произвольны, нулю должен равняться коэффициент при δA_i, т. е.

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c}j^i. \qquad (30,2)$$

Перепишем эти четыре ($i = 0, 1, 2, 3$) уравнения в трехмерной форме. При $i = 1$ имеем:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial F^{10}}{\partial t} + \frac{\partial F^{11}}{\partial x} + \frac{\partial F^{12}}{\partial y} + \frac{\partial F^{13}}{\partial z} = -\frac{4\pi}{c}j^1.$$

Подставляя значения составляющих тензора F^{ik}, находим:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t}-\frac{\partial H_z}{\partial y}+\frac{\partial H_y}{\partial z}=-\frac{4\pi}{c}j_x.$$

Вместе с двумя следующими ($i=2$, 3) уравнениями они могут быть записаны как одно векторное:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \tag{30,3}$$

Наконец, уравнение с $i=0$ дает:

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=4\pi\rho. \tag{30,4}$$

Уравнения (30,3) и (30,4) и составляют искомую вторую пару Максвелла[1]). Вместе с первой парой, они вполне определяют электромагнитное поле и являются основными уравнениями теории этих полей — *электродинамики.*

Напишем эти уравнения в интегральной форме. Интегрируя (30,4) по некоторому объему и применяя теорему Гаусса

$$\int\operatorname{div}\mathbf{E}\,dV=\oint\mathbf{E}\,d\mathbf{f},$$

находим:

$$\oint\mathbf{E}\,d\mathbf{f}=4\pi\int\rho\,dV. \tag{30,5}$$

Таким образом, поток электрического поля через замкнутую поверхность равен полному заряду, находящемуся в объеме, ограниченном этой поверхностью, умноженному на 4π.

Интегрируя (30,3) по некоторой незамкнутой поверхности и применяя теорему Стокса

$$\int\operatorname{rot}\mathbf{H}\,d\mathbf{f}=\oint\mathbf{H}\,d\mathbf{l},$$

находим:

$$\oint\mathbf{H}\,d\mathbf{l}=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int\mathbf{E}\,d\mathbf{f}+\frac{4\pi}{c}\int\mathbf{j}\,d\mathbf{f}. \tag{30,6}$$

Величину

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \tag{30,7}$$

называют *током смещения.* Из (30,6), написанного в виде

$$\oint\mathbf{H}\,d\mathbf{l}=\frac{4\pi}{c}\int\left(\mathbf{j}+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)d\mathbf{f}, \tag{30,8}$$

---

[1]) Уравнения Максвелла в форме, применимой к электромагнитному полю в пустоте вместе с находящимися в нем точечными зарядами, были сформулированы *Г. А. Лоренцем.*

видно, что циркуляция магнитного поля по некоторому контуру равна помноженной на $4\pi/c$ сумме токов истинного и смещения, протекающих сквозь поверхность, ограничиваемую этим контуром.

Из уравнений Максвелла можно получить известное уже нам уравнение непрерывности (29,3). Беря с обеих сторон (30,3) дивергенцию, находим:

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{E}+\frac{4\pi}{c}\operatorname{div}\mathbf{j}.$$

Но $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{H}\equiv 0$ и $\operatorname{div}\mathbf{E}=4\pi\rho$ согласно (30,4). Таким образом, мы приходим снова к уравнению (29,3). В четырехмерном виде из (30,2) имеем:

$$\frac{\partial^2 F^{ik}}{\partial x^i\,\partial x^k}=-\frac{4\pi}{c}\frac{\partial j^i}{\partial x^i}.$$

Но симметричный по индексам i, k оператор $\frac{\partial^2}{\partial x^i\,\partial x^k}$, примененный к антисимметричному тензору F^{ik}, обращает его тождественно в нуль, и мы приходим к уравнению непрерывности, написанному в четырехмерном виде (29,4).

§ 31. Плотность и поток энергии

Умножим обе части уравнения (30,3) на $\mathbf{E}$, а обе части уравнения (26,1) на $\mathbf{H}$ и сложим полученные уравнения почленно:

$$\frac{1}{c}\mathbf{E}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\frac{1}{c}\mathbf{H}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{jE}-(\mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{E}-\mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{H}).$$

Пользуясь известной формулой векторного анализа

$$\operatorname{div}[\mathbf{ab}]=\mathbf{b}\operatorname{rot}\mathbf{a}-\mathbf{a}\operatorname{rot}\mathbf{b},$$

переписываем это соотношение в виде

$$\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}(E^2+H^2)=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{jE}-\operatorname{div}[\mathbf{EH}],$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{E^2+H^2}{8\pi}=-\mathbf{jE}-\operatorname{div}\mathbf{S}. \tag{31,1}$$

Вектор

$$\mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}] \tag{31,2}$$

называют *вектором Пойнтинга.*

Проинтегрируем (31,1) по некоторому объему и применим ко второму члену справа теорему Гаусса. Мы получим тогда:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{E^2+H^2}{8\pi}\,dV=-\int\mathbf{jE}\,dV-\oint\mathbf{S}\,d\mathbf{f}. \tag{31,3}$$