видно, что циркуляция магнитного поля по некоторому контуру равна помноженной на $4\pi/c$ сумме токов истинного и смещения, протекающих сквозь поверхность, ограничиваемую этим контуром.

Из уравнений Максвелла можно получить известное уже нам уравнение непрерывности (29,3). Беря с обеих сторон (30,3) дивергенцию, находим:

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{E}+\frac{4\pi}{c}\operatorname{div}\mathbf{j}.$$

Но $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{H}\equiv 0$ и $\operatorname{div}\mathbf{E}=4\pi\rho$ согласно (30,4). Таким образом, мы приходим снова к уравнению (29,3). В четырехмерном виде из (30,2) имеем:

$$\frac{\partial^2 F^{ik}}{\partial x^i\,\partial x^k}=-\frac{4\pi}{c}\frac{\partial j^i}{\partial x^i}.$$

Но симметричный по индексам i, k оператор $\frac{\partial^2}{\partial x^i\,\partial x^k}$, примененный к антисимметричному тензору F^{ik}, обращает его тождественно в нуль, и мы приходим к уравнению непрерывности, написанному в четырехмерном виде (29,4).

§ 31. Плотность и поток энергии

Умножим обе части уравнения (30,3) на $\mathbf{E}$, а обе части уравнения (26,1) на $\mathbf{H}$ и сложим полученные уравнения почленно:

$$\frac{1}{c}\mathbf{E}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\frac{1}{c}\mathbf{H}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{jE}-(\mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{E}-\mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{H}).$$

Пользуясь известной формулой векторного анализа

$$\operatorname{div}[\mathbf{ab}]=\mathbf{b}\operatorname{rot}\mathbf{a}-\mathbf{a}\operatorname{rot}\mathbf{b},$$

переписываем это соотношение в виде

$$\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}(E^2+H^2)=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{jE}-\operatorname{div}[\mathbf{EH}],$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{E^2+H^2}{8\pi}=-\mathbf{jE}-\operatorname{div}\mathbf{S}. \tag{31,1}$$

Вектор

$$\mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}] \tag{31,2}$$

называют *вектором Пойнтинга.*

Проинтегрируем (31,1) по некоторому объему и применим ко второму члену справа теорему Гаусса. Мы получим тогда:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{E^2+H^2}{8\pi}\,dV=-\int\mathbf{jE}\,dV-\oint\mathbf{S}\,d\mathbf{f}. \tag{31,3}$$

Если интегрирование производится по всему пространству, то интеграл по поверхности исчезает (поле на бесконечности равно нулю). Далее, мы можем написать интеграл $\int \mathbf{jE}\,dV$ в виде суммы $\sum e\mathbf{vE}$ по всем зарядам, находящимся в поле, и подставить согласно (17,7)

$$e\mathbf{vE} = \frac{d}{dt}\mathscr{E}_{\text{кин}}.$$

Тогда (31,3) переходит в

$$\frac{d}{dt}\left\{\int \frac{E^2+H^2}{8\pi}\,dV + \sum \mathscr{E}_{\text{кин}}\right\} = 0. \qquad (31,4)$$

Таким образом, для замкнутой системы, состоящей из электромагнитного поля вместе с находящимися в нем частицами, сохраняется величина, стоящая в написанном уравнении в скобках. Второй член в этом выражении есть кинетическая энергия (вместе с энергией покоя всех частиц; см. примечание на стр. 73); первый же член есть, следовательно, энергия самого электромагнитного поля. Величину

$$W = \frac{E^2+H^2}{8\pi} \qquad (31,5)$$

мы можем поэтому назвать *плотностью энергии* электромагнитного поля; это есть энергия единицы объема поля.

При интегрировании по некоторому конечному объему поверхностный интеграл в (31,3), вообще говоря, не исчезает, так что мы можем написать это уравнение в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int \frac{E^2+H^2}{8\pi}\,dV + \sum \mathscr{E}_{\text{кин}}\right\} = -\oint \mathbf{S}\,d\mathbf{f}, \qquad (31,6)$$

где теперь во втором члене в скобках суммирование производится только по частицам, находящимся в рассматриваемом объеме. Слева стоит изменение полной энергии поля и частиц в единицу времени. Поэтому интеграл $\oint \mathbf{S}\,d\mathbf{f}$ надо рассматривать как поток энергии поля через поверхность, ограничивающую данный объем, так что вектор Пойнтинга $\mathbf{S}$ есть плотность этого потока — количество энергии поля, протекающее в единицу времени через единицу поверхности[1]).

---

[1]) Мы предполагаем, что на самой поверхности рассматриваемого объема в данный момент времени нет частиц. В противном случае в правой стороне равенства должен был бы стоять также и поток энергии, переносимой пересекающими поверхность частицами.