§ 32. Тензор энергии-импульса

В предыдущем параграфе мы вывели выражение для энергии электромагнитного поля. Выведем это выражение, вместе с выражением для импульса поля, в четырехмерной форме. При этом мы будем для простоты рассматривать пока электромагнитное поле без зарядов. Имея в виду дальнейшее применение (к гравитационным полям), а также упрощение выкладок, мы проделаем вывод в общем виде, не конкретизируя род системы.

Рассмотрим некоторую систему, интеграл действия для которой имеет вид

$$S=\int \Lambda\left(q,\ \frac{\partial q}{\partial x^i}\right) dV\, dt=\frac{1}{c}\int \Lambda\, d\Omega, \tag{32,1}$$

где Λ — некоторая функция от величин q, определяющих состояние системы и их производных по координатам и времени (для электромагнитного поля величинами q являются компоненты 4-потенциала); для краткости мы пишем здесь всего одну такую величину q. Заметим, что интеграл по пространству $\int \Lambda\, dV$ есть функция Лагранжа системы, так что Λ можно рассматривать как «плотность» функции Лагранжа. Математическим выражением замкнутости системы является отсутствие явной зависимости Λ от x^i, подобно тому, как функция Лагранжа для замкнутой механической системы не зависит явно от времени.

«Уравнения движения» (т. е. уравнения поля, если речь идет о каком-либо поле) получаются согласно принципу наименьшего действия путем варьирования S. Имеем (для краткости обозначаем $q_{,i}\equiv \partial q/\partial x^i$):

$$\delta S=\frac{1}{c}\int\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial q}\delta q+\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,i}}\delta q_{,i}\right)d\Omega=$$
$$=\frac{1}{c}\int\left[\frac{\partial\Lambda}{\partial q}\delta q+\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,i}}\delta q\right)-\delta q\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,i}}\right]d\Omega=0.$$

Второй член под интегралом, будучи преобразован по теореме Гаусса, исчезает при интегрировании по всему пространству, и мы находим тогда следующие «уравнения движения»:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,i}}-\frac{\partial\Lambda}{\partial q}=0 \tag{32,2}$$

(везде, конечно, подразумевается суммирование по дважды повторяющемуся индексу i).

Дальнейший вывод аналогичен тому, который производится в механике для вывода закона сохранения энергии. Именно, пишем:

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x^i}=\frac{\partial\Lambda}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x^i}+\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,k}}\frac{\partial q_{,k}}{\partial x^i}.$$

Подставляя сюда (32,2) и замечая, что $q_{,k,i}=q_{,i,k}$, находим:

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x^i}=\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,k}}\right)q_{,i}+\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,k}}\frac{\partial q_{,i}}{\partial x^k}=\frac{\partial}{\partial x^k}\left(q_{,i}\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,k}}\right).$$

Заменив в левой стороне равенства

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x^i}=\delta_i^k\frac{\partial\Lambda}{\partial x^k}$$

и введя обозначение

$$T_i^k=q_{,i}\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,k}}-\delta_i^k\Lambda, \tag{32,3}$$

напишем полученное соотношение в виде

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k}=0. \tag{32,4}$$

Если имеется не одна, а несколько величин $q^{(l)}$, то вместо (32,3) надо, очевидно, писать:

$$T_i^k=\sum_l q_{,i}^{(l)}\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,k}^{(l)}}-\delta_i^k\Lambda. \tag{32,5}$$

Мы видели в § 29, что уравнение вида $\partial A^k/\partial x^k=0$, т. е. равенство нулю 4-дивергенции вектора, эквивалентно утверждению, что сохраняется интеграл $\int A^k\,dS_k$ от этого вектора по гиперповерхности, заключающей в себе все трехмерное пространство. Очевидно, что аналогичное утверждение справедливо и для тензора: уравнение (32,4) эквивалентно утверждению, что сохраняется вектор

$$P^i=\text{const}\int T^{ik}\,dS_k.$$

Этот вектор и должен быть отождествлен с 4-импульсом системы. Постоянный множитель перед интегралом мы выберем так, чтобы временная компонента P^0 в соответствии с прежним определением была равна энергии системы, деленной на c. Для этого замечаем, что

$$P^0=\text{const}\int T^{0k}\,dS_k=\text{const}\int T^{00}\,dV,$$

если интегрирование производится по гиперплоскости $x^0=\text{const}$. С другой стороны, согласно (32,3) имеем:

$$T^{00}=\dot q\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot q}-\Lambda$$

(где $\dot{q} \equiv \partial q/\partial t$). В соответствии с обычной формулой, связывающей энергию с функцией Лагранжа, эту величину надо рассматривать как плотность энергии, и поэтому $\int T^{00}\,dV$ есть полная энергия системы. Таким образом, надо положить $\mathrm{const} = 1/c$, и мы получаем окончательно для 4-импульса системы выражение

$$P^i = \frac{1}{c}\int T^{ik}\,dS_k. \tag{32,6}$$

Тензор T^{ik} называется *тензором энергии-импульса* системы.

Необходимо заметить, что определение тензора T^{ik} по существу не однозначно. Действительно, если T^{ik} — тензор, определенный согласно (32,3), то и всякий другой тензор вида

$$T^{ik} + \frac{\partial}{\partial x^l}\psi^{ikl},\quad \psi^{ikl} = -\psi^{ilk}, \tag{32,7}$$

удовлетворяет уравнению сохранения (32,4), так как тождественно $\frac{\partial^2}{\partial x^k\,\partial x^l}\psi^{ikl} = 0$ ввиду антисимметричности тензора ψ^{ikl} по индексам k, l. Полный 4-импульс системы при этом вообще не изменится, так как согласно (6,17) имеем:

$$\int \frac{\partial\psi^{ikl}}{\partial x^l}\,dS_k = \frac{1}{2}\int\left(dS_k\,\frac{\partial\psi^{ikl}}{\partial x^l} - dS_l\,\frac{\partial\psi^{ikl}}{\partial x^k}\right) = \frac{1}{2}\oint \psi^{ikl}\,df^*_{kl},$$

где интегрирование с правой стороны равенства производится по поверхности (обычной), «охватывающей» гиперповерхность, по которой производится интегрирование с левой стороны равенства. Эта поверхность находится, очевидно, на бесконечности трехмерного пространства, и, поскольку поле или частицы на бесконечности отсутствуют, интеграл равен нулю. Таким образом, 4-импульс системы является, как и следовало, однозначно определенной величиной.

Для однозначного же определения тензора T^{ik} можно воспользоваться требованием, чтобы 4-тензор момента импульса (§ 14) выражался через 4-импульс посредством

$$M^{ik} = \int (x^i\,dP^k - x^k\,dP^i) = \frac{1}{c}\int (x^iT^{kl} - x^kT^{il})\,dS_l, \tag{32,8}$$

т. е. так, чтобы его плотность выражалась через плотность импульса обычной формулой.

Легко найти, какому условию должен для этого удовлетворять тензор энергии-импульса. Закон сохранения момента может быть выражен, как мы уже знаем, равенством нулю дивергенции подынтегрального выражения в M^{ik}. Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial x^l}(x^iT^{kl} - x^kT^{il}) = 0. \tag{32,9}$$

Замечая, что $\partial x^i/\partial x^l = \delta^i_l$ и $\partial T^{kl}/\partial x^l = 0$, находим:

$$\delta^i_l T^{kl} - \delta^k_l T^{il} = T^{ki} - T^{ik} = 0,$$

или

$$T^{ik} = T^{ki}, \tag{32,10}$$

т. е. тензор энергии-импульса должен быть симметричен.

Заметим, что тензор T^{ik}, определенный формулой (32,5), вообще говоря, не симметричен, но может быть сделан таковым заменой (32,7) с надлежащим образом выбранным ψ^{ikl}. В дальнейшем (§ 94) мы увидим, что существует способ непосредственного получения симметричного тензора T^{ik}.

Как уже упоминалось выше, если производить интегрирование в (32,6) по гиперплоскости $x^0 = \text{const}$, то P^i приобретает вид

$$P^i = \frac{1}{c}\int T^{i0}\,dV, \tag{32,11}$$

где интегрирование производится по всему пространству (трехмерному). Пространственные компоненты P^i образуют трехмерный вектор импульса системы, а временная компонента есть деленная на c ее энергия. Поэтому вектор с составляющими

$$\frac{1}{c}T^{10},\quad \frac{1}{c}T^{20},\quad \frac{1}{c}T^{30}$$

можно назвать *плотностью импульса*, а величину

$$W = T^{00}$$

можно рассматривать как *плотность энергии*.

Для выяснения смысла остальных компонент T^{ik} напишем уравнения сохранения (32,4), отделив в них пространственные и временные производные:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{0\alpha}}{\partial x^\alpha} = 0, \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial T^{\alpha 0}}{\partial t} + \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0. \tag{32,12}$$

Проинтегрируем эти уравнения по некоторому объему пространства V. Из первого имеем:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int T^{00}\,dV + \int \frac{\partial T^{0\alpha}}{\partial x^\alpha}\,dV = 0,$$

или, преобразуя второй интеграл по (трехмерной) теореме Гаусса,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int T^{00}\,dV = -c\oint T^{0\alpha}\,df_\alpha, \tag{32,13}$$

где интеграл справа берется по поверхности, охватывающей объем V (df_x, df_y, df_z — компоненты трехмерного вектора элемента поверхности $d\mathbf{f}$). В левой стороне равенства (32,13) стоит скорость изменения энергии, находящейся в объеме V. Отсюда видно, что выражение справа есть количество энергии, проте-

кающий через границу этого объема, а вектор S с составляющими

$$cT^{01}, \qquad cT^{02}, \qquad cT^{03}$$

есть плотность этого потока — количество энергии, протекающей в единицу времени через единицу поверхности. Таким образом, мы приходим к важному выводу о том, что требования релятивистской инвариантности, заключенные в тензорном характере величин T^{ik}, автоматически приводят к определенной связи между потоком энергии и импульсом: плотность потока энергии равна плотности импульса, умноженной на c^2.

Из второго уравнения (32,12) аналогичным путем находим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{1}{c} T^{\alpha 0}\, dV = -\oint T^{\alpha\beta}\, df_\beta. \tag{32,14}$$

Слева стоит изменение импульса системы в объеме V в единицу времени; поэтому $\oint T^{\alpha\beta}\, df_\beta$ есть количество импульса, вытекающее в единицу времени из этого объема. Таким образом, компоненты $T^{\alpha\beta}$ тензора энергии-импульса составляют трехмерный тензор плотности потока импульса; обозначим его через $-\sigma_{\alpha\beta}$, где $\sigma_{\alpha\beta}$ — так называемый *тензор напряжений*. Плотность потока энергии есть вектор; плотность же потока импульса, который сам по себе есть вектор, должна, очевидно, быть тензором (компонента $T_{\alpha\beta}$ этого тензора есть количество α-й компоненты импульса, протекающее в единицу времени через единицу поверхности, перпендикулярную к оси x^β).

Выпишем еще раз таблицу, указывающую смысл различных компонент тензора энергии-импульса:

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} W & S_x/c & S_y/c & S_z/c \\ S_x/c & -\sigma_{xx} & -\sigma_{xy} & -\sigma_{xz} \\ S_y/c & -\sigma_{yx} & -\sigma_{yy} & -\sigma_{yz} \\ S_z/c & -\sigma_{zx} & -\sigma_{zy} & -\sigma_{zz} \end{pmatrix}. \tag{32,15}$$

§ 33. Тензор энергии-импульса электромагнитного поля

Применим теперь полученные в предыдущем параграфе общие соотношения к электромагнитному полю. Для электромагнитного поля величина Λ, стоящая под знаком интеграла (32,1), равна согласно (27,4)

$$\Lambda = -\frac{1}{16\pi} F_{kl}F^{kl}.$$

Величинами q являются компоненты 4-потенциала поля A_k, так что определение (32,5) тензора T_i^k принимает вид

$$T_i^k = \frac{\partial A_l}{\partial x^i}\frac{\partial \Lambda}{\partial(\partial A_l/\partial x^k)} - \delta_i^k \Lambda.$$