кающий через границу этого объема, а вектор S с составляющими

$$cT^{01}, \qquad cT^{02}, \qquad cT^{03}$$

есть плотность этого потока — количество энергии, протекающей в единицу времени через единицу поверхности. Таким образом, мы приходим к важному выводу о том, что требования релятивистской инвариантности, заключенные в тензорном характере величин T^{ik}, автоматически приводят к определенной связи между потоком энергии и импульсом: плотность потока энергии равна плотности импульса, умноженной на c^2.

Из второго уравнения (32,12) аналогичным путем находим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{1}{c} T^{\alpha 0}\, dV = -\oint T^{\alpha\beta}\, df_\beta. \tag{32,14}$$

Слева стоит изменение импульса системы в объеме V в единицу времени; поэтому $\oint T^{\alpha\beta}\, df_\beta$ есть количество импульса, вытекающее в единицу времени из этого объема. Таким образом, компоненты $T^{\alpha\beta}$ тензора энергии-импульса составляют трехмерный тензор плотности потока импульса; обозначим его через $-\sigma_{\alpha\beta}$, где $\sigma_{\alpha\beta}$ — так называемый *тензор напряжений*. Плотность потока энергии есть вектор; плотность же потока импульса, который сам по себе есть вектор, должна, очевидно, быть тензором (компонента $T_{\alpha\beta}$ этого тензора есть количество α-й компоненты импульса, протекающее в единицу времени через единицу поверхности, перпендикулярную к оси x^β).

Выпишем еще раз таблицу, указывающую смысл различных компонент тензора энергии-импульса:

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} W & S_x/c & S_y/c & S_z/c \\ S_x/c & -\sigma_{xx} & -\sigma_{xy} & -\sigma_{xz} \\ S_y/c & -\sigma_{yx} & -\sigma_{yy} & -\sigma_{yz} \\ S_z/c & -\sigma_{zx} & -\sigma_{zy} & -\sigma_{zz} \end{pmatrix}. \tag{32,15}$$

§ 33. Тензор энергии-импульса электромагнитного поля

Применим теперь полученные в предыдущем параграфе общие соотношения к электромагнитному полю. Для электромагнитного поля величина Λ, стоящая под знаком интеграла (32,1), равна согласно (27,4)

$$\Lambda = -\frac{1}{16\pi} F_{kl}F^{kl}.$$

Величинами q являются компоненты 4-потенциала поля A_k, так что определение (32,5) тензора T_i^k принимает вид

$$T_i^k = \frac{\partial A_l}{\partial x^i}\frac{\partial \Lambda}{\partial(\partial A_l/\partial x^k)} - \delta_i^k \Lambda.$$

Для вычисления стоящей здесь производной от Λ напишем вариацию:

$$\delta\Lambda = -\frac{1}{8\pi} F^{kl}\,\delta F_{kl} = -\frac{1}{8\pi} F^{kl}\,\delta\left(\frac{\partial A_l}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^l}\right).$$

Переставляя индексы и имея в виду антисимметричность F_{kl}, получим:

$$\delta\Lambda = -\frac{1}{4\pi} F^{kl}\delta\frac{\partial A_l}{\partial x^k}.$$

Отсюда мы видим, что

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\left(\partial A_l/\partial x^k\right)} = -\frac{1}{4\pi} F^{kl},$$

и поэтому

$$T_i^k = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial A_l}{\partial x^i} F^{kl} + \frac{1}{16\pi}\delta_i^k F_{lm}F^{lm},$$

или для контравариантных компонент

$$T^{ik} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial A^l}{\partial x_i} F^k{}_l + \frac{1}{16\pi} g^{ik} F_{lm}F^{lm}.$$

Этот тензор, однако, не симметричен. Для его симметризации прибавим к нему величину

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial A^i}{\partial x_l} F^k{}_l.$$

Согласно уравнению поля (30,2) в отсутствие зарядов $\partial F^k{}_l/\partial x_l = 0$, а потому

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial A^l}{\partial x_i} F^k{}_l = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x_l}\left(A^i F^k{}_l\right),$$

так что производимая замена T^{ik} относится к виду (32,7) и является допустимой. Поскольку $\frac{\partial A^l}{\partial x_i} - \frac{\partial A^i}{\partial x_l} = F^{il}$, то мы находим окончательно следующее выражение для тензора энергии-импульса электромагнитного поля:

$$T^{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(-F^{il}F^k{}_l + \frac{1}{4} g^{ik} F_{lm}F^{lm}\right). \qquad (33,1)$$

Симметричность этого тензора очевидна. Кроме того, его след равен нулю:

$$T_i^i = 0. \qquad (33,2)$$

Выразим компоненты тензора T^{ik} через напряженности электрического и магнитного полей. С помощью значений F_{ik} из

(23,5) легко убедиться в том, что T^{00} совпадает, как и следовало, с плотностью энергии (31,5), а компоненты $cT^{0\alpha}$ — с компонентами вектора Пойнтинга (31,2). Пространственные же компоненты $T^{\alpha\beta}$ образуют трехмерный тензор с составляющими

$$-\sigma_{xx}=\frac{1}{8\pi}(E_y^2+E_z^2-E_x^2+H_y^2+H_z^2-H_x^2),$$

$$-\sigma_{xy}=-\frac{1}{4\pi}(E_xE_y+H_xH_y)$$

и т. д., или

$$\sigma_{\alpha\beta}=\frac{1}{4\pi}\left\{E_\alpha E_\beta+H_\alpha H_\beta-\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}(E^2+H^2)\right\}. \qquad (33,3)$$

Этот трехмерный тензор называют *максвелловским тензором напряжений.*

Для приведения тензора T^{ik} к диагональному виду надо произвести преобразование к системе отсчета, в которой векторы **E** и **H** (в данной точке пространства и в данный момент времени) параллельны друг другу, либо один из них равен нулю; как мы знаем (§ 25), такое преобразование возможно всегда, за исключением случая, когда **E** и **H** взаимно перпендикулярны и равны по величине. Легко видеть, что после преобразования единственными отличными от нуля компонентами T^{ik} будут

$$T^{00}=-T^{11}=T^{22}=T^{33}=W$$

(ось x выбрана в направлении полей).

Если же векторы **E** и **H** взаимно перпендикулярны и равны по величине, то тензор T^{ik} не может быть приведен к диагональному виду[1]). Отличные от нуля его компоненты в этом случае равны

$$T^{00}=T^{33}=T^{30}=W$$

(причем ось x выбрана вдоль направления **E**, а ось y — вдоль **H**).

До сих пор мы рассматривали поле без зарядов. При наличии заряженных частиц тензор энергии-импульса всей системы представляет собой сумму тензоров энергии-импульса электромагнитного поля и частиц, причем в последнем частицы рассматриваются как невзаимодействующие.

Для определения вида тензора энергии-импульса частиц необходимо описывать распределение масс в пространстве с помощью «плотности массы», аналогично тому, как мы описываем распределение точечных зарядов с помощью их плотности.

---

[1]) Тот факт, что приведение симметричного 4-тензора T^{ik} к главным осям может оказаться невозможным, связан с псевдоевклидовостью 4-пространства (см. также задачу к § 94).

Аналогично формуле (28,1) для плотности зарядов, плотность масс можно написать в виде

$$\mu = \sum_a m_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a), \tag{33,4}$$

где $\mathbf{r}_a$ — радиус-векторы частиц, а суммирование производится по всем частицам системы.

Плотность импульса частиц напишется в виде $\mu c u^\alpha$. Как мы знаем, эта плотность представляет собой компоненты $T^{0\alpha}/c$ тензора энергии-импульса, т. е.

$$T^{0\alpha} = \mu c^2 u^\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Но плотность массы является временной компонентой 4-вектора $\frac{\mu}{c}\frac{dx^k}{dt}$ (аналогично плотности зарядов, см. § 28). Поэтому тензор энергии-импульса системы невзаимодействующих частиц есть

$$T^{ik} = \mu c \frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{dt} = \mu c u^i u^k \frac{ds}{dt}. \tag{33,5}$$

Этот тензор, как и следовало, симметричен.

Убедимся прямым вычислением в том, что энергия и импульс системы, определенные как суммы энергий и импульсов поля и частиц, действительно сохраняются. Другими словами, мы должны проверить уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(T^{(\text{п})k}_{\ \ i} + T^{(\text{ч})k}_{\ \ i}\right) = 0, \tag{33,6}$$

выражающее эти законы сохранения.

Дифференцируя выражение (33,1), пишем:

$$\frac{\partial T^{(\text{п})k}_{\ \ i}}{\partial x^k} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{2}F^{lm}\frac{\partial F_{lm}}{\partial x^i} - F^{kl}\frac{\partial F_{il}}{\partial x^k} - F_{il}\frac{\partial F^{kl}}{\partial x^k}\right).$$

Подставив сюда согласно уравнениям Максвелла (26,5) и (30,2)

$$\frac{\partial F_{lm}}{\partial x^i} = -\frac{\partial F_{mi}}{\partial x^l} - \frac{\partial F_{il}}{\partial x^m}, \qquad \frac{\partial F^{kl}}{\partial x^k} = \frac{4\pi}{c} j^l,$$

получим:

$$\frac{\partial T^{(\text{п})k}_{\ \ i}}{\partial x^k} = \frac{1}{4\pi}\left(-\frac{1}{2}F^{lm}\frac{\partial F_{mi}}{\partial x^l} - \frac{1}{2}F^{lm}\frac{\partial F_{il}}{\partial x^m} - F^{kl}\frac{\partial F_{il}}{\partial x^k} - \frac{4\pi}{c}F_{il}j^l\right).$$

Перестановкой индексов легко показать, что первые три члена

взаимно сокращаются и остается

$$\frac{\partial T^{(\text{п})k}_{i}}{\partial x^k} = -\frac{1}{c} F_{il} j^l. \tag{33,7}$$

Дифференцирование же тензора (33,5) дает:

$$\frac{\partial T^{(\text{ч})k}_{i}}{\partial x^k} = c u_i \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\mu \frac{dx^k}{dt}\right) + \mu c \frac{dx^k}{dt}\frac{\partial u_i}{\partial x^k}.$$

Первый член в этом выражении обращается в нуль в силу сохранения массы невзаимодействующих частиц. Действительно, величины $\mu \frac{dx^k}{dt}$ составляют 4-вектор «тока масс», аналогичный 4-вектору тока зарядов (28,2); сохранение же масс выражается равенством нулю 4-дивергенции этого 4-вектора:

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\mu \frac{dx^k}{dt}\right) = 0, \tag{33,8}$$

подобно тому, как сохранение заряда выражается уравнением (29,4).

Таким образом, имеем:

$$\frac{\partial T^{(\text{ч})k}_{i}}{\partial x^k} = \mu c \frac{dx^k}{dt}\frac{\partial u_i}{\partial x^k} = \mu c \frac{du_i}{dt}.$$

Для дальнейшего преобразования воспользуемся уравнением движения зарядов в поле, написанным в четырехмерном виде (23,4):

$$mc \frac{du_i}{ds} = \frac{e}{c} F_{ik} u^k.$$

При переходе к непрерывному распределению заряда и массы имеем, по определению плотностей μ и ρ: $\mu/m = \rho/e$. Поэтому можно написать уравнение движения в виде

$$\mu c \frac{du_i}{ds} = \frac{\rho}{c} F_{ik} u^k,$$

или

$$\mu c \frac{du_i}{dt} = \frac{1}{c} F_{ik} \rho u^k \frac{ds}{dt} = \frac{1}{c} F_{ik} j^k.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial T^{(\text{ч})k}_{i}}{\partial x^k} = \frac{1}{c} F_{ik} j^k. \tag{33,9}$$

Складывая с (33,7), мы действительно получаем нуль, т. е. приходим к уравнению (33,6).

Задача

Найти закон преобразования плотности энергии, плотности потока энергии и компонент тензора напряжений при преобразовании Лоренца.

Решение. Пусть система координат K' движется относительно системы K вдоль оси x со скоростью V. Применяя формулы задачи 1 § 6 к симметричному тензору T^{ik}, находим:

$$W=\frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}}\left(W'+\frac{V}{c^2}S'_x-\frac{V^2}{c^2}\sigma'_{xx}\right),$$

$$S_x=\frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}}\left[\left(1+\frac{V^2}{c^2}\right)S'_x+VW'-V\sigma'_{xx}\right],$$

$$S_y=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(S'_y-V\sigma'_{xy}\right),$$

$$\sigma_{xx}=\frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}}\left(\sigma'_{xx}-2\frac{V}{c^2}S'_x-\frac{V^2}{c^2}W'\right),$$

$$\sigma_{yy}=\sigma'_{yy},\quad \sigma_{zz}=\sigma'_{zz},\quad \sigma_{yz}=\sigma'_{yz},$$

$$\sigma_{xy}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(\sigma'_{xy}-\frac{V}{c^2}S'_y\right)$$

и аналогичные формулы для S_z и σ_{xz}.

§ 34. Теорема вириала

Поскольку след тензора энергии-импульса электромагнитного поля равен нулю, то сумма T^i_i для любой системы взаимодействующих частиц сводится к следу тензора энергии-импульса одних лишь частиц. Воспользовавшись выражением (33,5), имеем поэтому:

$$T^i_i=T^{(\text{ч})i}_i=\mu c u_i u^i\frac{ds}{dt}=\mu c\frac{ds}{dt}=\mu c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Перепишем этот результат, возвратившись к суммированию по частицам, т. е. представив μ в виде суммы (33,4). Тогда получим окончательно:

$$T^i_i=\sum_a m_a c^2\sqrt{1-\frac{v_a^2}{c^2}}\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a). \tag{34,1}$$

Отметим, что согласно этой формуле для всякой системы имеем:

$$T^i_i\geqslant 0, \tag{34,2}$$

причем знак равенства имеет место только для электромагнитного поля без зарядов.