

Задача

Найти закон преобразования плотности энергии, плотности потока энергии и компонент тензора напряжений при преобразовании Лоренца.

Решение. Пусть система координат K' движется относительно системы K вдоль оси x со скоростью V . Применяя формулы задачи I § 6 к симметричному тензору T^{ik} , находим:

$$W = \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \left(W' + \frac{V}{c^2} S'_x - \frac{V^2}{c^2} \sigma'_{xx} \right),$$

$$S_x = \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \left[\left(1 + \frac{V^2}{c^2} \right) S'_x + V W' - V \sigma'_{xx} \right],$$

$$S_y = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} (S'_y - V \sigma'_{xy}),$$

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \left(\sigma'_{xx} - 2 \frac{V}{c^2} S'_x - \frac{V^2}{c^2} W' \right),$$

$$\sigma_{yy} = \sigma'_{yy}, \quad \sigma_{zz} = \sigma'_{zz}, \quad \sigma_{yz} = \sigma'_{yz},$$

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \left(\sigma'_{xy} - \frac{V}{c^2} S'_y \right)$$

и аналогичные формулы для S_z и σ_{xz} .

§ 34. Теорема вириала

Поскольку след тензора энергии-импульса электромагнитного поля равен нулю, то сумма T_i^i для любой системы взаимодействующих частиц сводится к следу тензора энергии-импульса одних лишь частиц. Воспользовавшись выражением (33,5), имеем поэтому:

$$T_i^i = T^{(q)}_i = \mu c u_i \mu^i \frac{ds}{dt} = \mu c \frac{ds}{dt} = \mu c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Перепишем этот результат, возвратившись к суммированию по частицам, т. е. представив μ в виде суммы (33,4). Тогда получим окончательно:

$$T_i^i = \sum_a m_a c^2 \sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a). \quad (34,1)$$

Отметим, что согласно этой формуле для всякой системы имеем:

$$T_i^i \geqslant 0, \quad (34,2)$$

причем знак равенства имеет место только для электромагнитного поля без зарядов.

Рассмотрим замкнутую систему заряженных частиц, совершающих финитное движение, при котором все характеризующие систему величины (координаты, импульсы) меняются в конечных интервалах¹⁾.

Выведем соотношение, связывающее полную энергию системы с некоторыми усредненными по времени ее характеристиками.

Усредним уравнение

$$\frac{1}{c} \frac{\partial T^{\alpha 0}}{\partial t} + \frac{\partial T^{\alpha \beta}}{\partial x^\beta} = 0$$

(см. (32,12)) по времени. При этом среднее значение производной $\partial T^{\alpha 0} / \partial t$, как и вообще производной от всякой величины, меняющейся в конечном интервале, равно нулю²⁾. Поэтому находим:

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} \bar{T}_\alpha^\beta = 0.$$

Умножаем это уравнение на x^α и интегрируем по всему пространству. Интеграл преобразуем по теореме Гаусса, имея в виду, что на бесконечности $\bar{T}_\alpha^\beta = 0$, и потому интеграл по поверхности исчезает:

$$\int x^\alpha \frac{\partial \bar{T}_\alpha^\beta}{\partial x^\beta} dV = - \int \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} \bar{T}_\alpha^\beta dV = - \int \delta_\beta^\alpha \bar{T}_\alpha^\beta dV = 0,$$

или окончательно:

$$\int \bar{T}_\alpha^\alpha dV = 0. \quad (34,3)$$

На основании этого равенства мы можем написать для интеграла от $\bar{T}_i^i = \bar{T}_\alpha^\alpha + \bar{T}_0^0$

$$\int \bar{T}_i^i dV = \int \bar{T}_0^0 dV = \mathcal{E},$$

где \mathcal{E} — полная энергия системы.

¹⁾ При этом предполагается также, что электромагнитное поле системы достаточно быстро стремится к нулю на бесконечности. В конкретных задачах это условие может означать необходимость пренебрежения излучением электромагнитных волн системой.

²⁾ Пусть f есть такая величина. Тогда среднее значение производной df/dt за некоторый интервал времени T есть

$$\overline{\frac{df}{dt}} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{df}{dt} dt = \frac{f(T) - f(0)}{T}.$$

Поскольку $f(t)$ меняется только в конечных пределах, то при неограниченном увеличении T это среднее значение действительно стремится к нулю.

Наконец, подставляя сюда (34,1), найдем:

$$\mathcal{E} = \sum_a m_a c^2 \sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}. \quad (34,4)$$

Это соотношение является релятивистским обобщением *теоремы вириала* классической механики (см. I § 10). Для малых скоростей оно переходит в

$$\mathcal{E} - \sum_a m_a c^2 = - \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2},$$

т. е. полная энергия системы за вычетом энергии покоя частиц равна взятому с обратным знаком среднему значению кинетической энергии, в согласии с результатом, получаемым из классической теоремы вириала для системы частиц, взаимодействующих по закону Кулона.

Необходимо отметить, что полученные формулы носят до некоторой степени формальный характер и нуждаются в уточнении. Дело в том, что энергия электромагнитного поля содержит члены с бесконечным вкладом от собственной электромагнитной энергии точечных зарядов (см. § 37). Чтобы придать смысл соответствующим выражениям, следует опустить эти члены, считая, что собственная электромагнитная энергия уже включена в кинетическую энергию частицы (9,4). Это означает, что мы должны произвести «перенормировку» энергии, сделав замену в (34,4).

$$\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} - \sum_a \int \frac{E_a^2 + H_a^2}{8\pi} dV,$$

где E_a и H_a — поля, создаваемые a -й частицей. Аналогично в (34,3) следует заменить¹⁾

$$\int T_a^a dV \rightarrow \int T_a^a dV + \sum_a \int \frac{E_a^2 + H_a^2}{8\pi} dV.$$

§ 35. Тензор энергии-импульса макроскопических тел

Наряду с тензором энергии-импульса системы точечных частиц (33,5) нам понадобится в дальнейшем выражение этого тензора для макроскопических тел, рассматриваемых как сплошные.

¹⁾ Отметим, что без такой замены выражение

$$-\int T_a^a dV = \int \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV + \sum_a \frac{m_a v_a^2}{\sqrt{1 - v_a^2/c^2}}$$

есть существенно положительная величина и не может обратиться в нуль.