Наконец, подставляя сюда (34,1), найдем:

$$\mathscr{E} = \sum_a m_a c^2 \overline{\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}}. \tag{34,4}$$

Это соотношение является релятивистским обобщением *теоремы вириала* классической механики (см. I § 10). Для малых скоростей оно переходит в

$$\mathscr{E} - \sum_a m_a c^2 = -\sum_a \overline{\frac{m_a v_a^2}{2}},$$

т. е. полная энергия системы за вычетом энергии покоя частиц равна взятому с обратным знаком среднему значению кинетической энергии, в согласии с результатом, получаемым из классической теоремы вириала для системы частиц, взаимодействующих по закону Кулона.

Необходимо отметить, что полученные формулы носят до некоторой степени формальный характер и нуждаются в уточнении. Дело в том, что энергия электромагнитного поля содержит члены с бесконечным вкладом от собственной электромагнитной энергии точечных зарядов (см. § 37). Чтобы придать смысл соответствующим выражениям, следует опустить эти члены, считая, что собственная электромагнитная энергия уже включена в кинетическую энергию частицы (9,4). Это означает, что мы должны произвести «перенормировку» энергии, сделав замену в (34,4)

$$\mathscr{E} \to \mathscr{E} - \sum_a \int \frac{E_a^2 + H_a^2}{8\pi} dV,$$

где $\mathbf{E}_a$ и $\mathbf{H}_a$ — поля, создаваемые a-й частицей. Аналогично в (34,3) следует заменить [1])

$$\int T_\alpha^\alpha dV \to \int T_\alpha^\alpha dV + \sum_a \int \frac{E_a^2 + H_a^2}{8\pi} dV.$$

§ 35. Тензор энергии-импульса макроскопических тел

Наряду с тензором энергии-импульса системы точечных частиц (33,5) нам понадобится в дальнейшем выражение этого тензора для макроскопических тел, рассматриваемых как сплошные.

---

[1]) Отметим, что без такой замены выражение

$$-\int T_\alpha^\alpha dV = \int \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV + \sum_a \frac{m_a v_a^2}{\sqrt{1 - v_a^2/c^2}}$$

есть существенно положительная величина и не может обратиться в нуль.

Поток импульса через элемент поверхности тела есть не что иное, как действующая на этот элемент сила. Поэтому $-\sigma_{\alpha\beta}df_\beta$ есть α-я компонента силы, действующей на элемент поверхности $d\mathbf{f}$. Воспользуемся теперь системой отсчета, в которой данный элемент объема тела покоится. В такой системе отсчета имеет место закон Паскаля, т. е. давление p, оказываемое данным участком тела, одинаково по всем направлениям и везде перпендикулярно к площадке, на которую оно производится [1]). Поэтому мы можем написать $\sigma_{\alpha\beta}df_\beta = -p\,df_\alpha$, откуда тензор напряжений $\sigma_{\alpha\beta} = -p\delta_{\alpha\beta}$. Что касается компонент $T^{\alpha 0}$, дающих плотность импульса, то для данного элемента объема тела в рассматриваемой системе отсчета они равны нулю. Компонента же T^{00}, как всегда, равна плотности энергии тела, которую мы обозначим здесь через ε; ε/c^2 есть при этом плотность массы, т. е. масса единицы объема. Подчеркнем, что речь идет здесь о единице собственного объема, т. е. объема в той системе отсчета, в которой данный участок тела покоится.

Таким образом, в рассматриваемой системе отсчета тензор энергии-импульса (для данного участка тела) имеет вид

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \tag{35,1}$$

Легко найти теперь выражение для тензора энергии-импульса в любой системе отсчета. Для этого введем 4-скорость u^i макроскопического движения элемента объема тела. В системе покоя этого элемента $u^i = (1,0)$. Выражение для T^{ik} должно быть выбрано так, чтобы в этой системе он приобретал вид (35,1). Легко проверить, что таковым является

$$T^{ik} = (p+\varepsilon)\,u^i u^k - pg^{ik}, \tag{35,2}$$

или для смешанных компонент

$$T_i^k = (p+\varepsilon)\,u_i u^k - p\delta_i^k.$$

Этим и определяется тензор энергии-импульса макроскопического тела. Соответствующие выражения для плотности энергии W, плотности потока энергии $\mathbf{S}$ и тензора напряжений $\sigma_{\alpha\beta}$:

$$W = \frac{\varepsilon + p\dfrac{v^2}{c^2}}{1-\dfrac{v^2}{c^2}}, \quad \mathbf{S} = \frac{(p+\varepsilon)\,\mathbf{v}}{1-\dfrac{v^2}{c^2}}, \quad \sigma_{\alpha\beta} = -\frac{(p+\varepsilon)\,v_\alpha v_\beta}{c^2\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)} - p\delta_{\alpha\beta}. \tag{35,3}$$

---

[1]) Строго говоря, закон Паскаля имеет место только для жидкостей и газов. Однако для твердых тел максимальные возможные разности давлений в разных направлениях ничтожны по сравнению с теми давлениями, которые могут играть роль в теории относительности, так что их учет не представляет интереса.

Если скорость $\mathbf{v}$ макроскопического движения мала по сравнению со скоростью света, то имеем приближенно:

$$\mathbf{S} = (p + \varepsilon)\mathbf{v}.$$

Поскольку $\mathbf{S}/c^2$ есть плотность импульса, то мы видим, что роль плотности массы играет в этом случае сумма $(p + \varepsilon)/c^2$.

Выражение для T^{ik} упрощается в случае, если скорости всех частиц, входящих в состав тела, малы по сравнению со скоростью света (скорость же макроскопического движения может быть произвольной). В этом случае в плотности энергии ε можно пренебречь всеми ее частями, малыми по сравнению с энергией покоя, т. е. можно писать $\mu_0 c^2$ вместо ε, где μ_0 — сумма масс частиц, находящихся в единице (собственного) объема тела (подчеркнем, что в общем случае μ_0 надо отличать от точной плотности массы ε/c^2, включающей в себя также и массу, происходящую от энергии микроскопического движения частиц в теле и энергии их взаимодействия). Что касается давления, определяемого энергией микроскопического движения молекул, то оно в рассматриваемом случае тоже мало по сравнению с плотностью энергии покоя $\mu_0 c^2$. Таким образом, находим в этом случае:

$$T^{ik} = \mu_0 c^2 u^i u^k. \tag{35,4}$$

Из выражения (35,2) имеем:

$$T^i_i = \varepsilon - 3p. \tag{35,5}$$

Общее свойство (34,2) тензора энергии-импульса любой системы показывает теперь, что для давления и плотности макроскопического тела всегда имеет место неравенство

$$p < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{35,6}$$

Сравним выражение (35,5) с общей формулой (34,1). Поскольку мы рассматриваем сейчас макроскопическое тело, то выражение (34,1) надо усреднить по всем значениям $\mathbf{r}$ в единице объема. В результате находим:

$$\varepsilon - 3p = \sum m_a c^2 \sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}} \tag{35,7}$$

(суммирование производится по частицам, находящимся в единице объема). В ультрарелятивистском пределе правая сторона

этого равенства стремится к нулю и, таким образом, уравнение состояния вещества в этом пределе[1]):

$$p = \frac{\varepsilon}{3}. \tag{35,8}$$

Применим полученные формулы к идеальному газу, который мы предположим состоящим из одинаковых частиц. Поскольку частицы идеального газа не взаимодействуют друг с другом, можно воспользоваться формулой (33,5), усреднив ее. Таким образом, для идеального газа

$$T^{ik} = nmc\,\overline{\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{ds}},$$

где n — число частиц в единице объема, а черта обозначает усреднение по всем частицам. Если в газе нет никакого макроскопического движения, то мы имеем, с другой стороны, для T^{ik} выражение (35,1). Сравнение обеих формул приводит к равенствам:

$$\varepsilon = nm\,\overline{\frac{c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}, \quad p = \frac{nm}{3}\,\overline{\frac{v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}. \tag{35,9}$$

Эти равенства определяют плотность и давление релятивистского идеального газа через скорости частиц; вторая из них заменяет собой известную формулу $p = nm\overline{v^2}/3$ нерелятивистской кинетической теории газов.

---

[1]) Это предельное уравнение состояния выведено здесь в предположении электромагнитного взаимодействия между частицами. Мы будем считать (когда это понадобится в гл. XIV), что оно остается справедливым и для других существующих в природе взаимодействий между частицами, хотя доказательства этого предположения в настоящее время не существует.