ГЛАВА V

ПОСТОЯННОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

§ 36. Закон Кулона

Для постоянного электрического (*электростатического*) поля уравнения Максвелла имеют вид

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \tag{36,1}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \tag{36,2}$$

Электрическое поле $\mathbf{E}$ выражается через один только скалярный потенциал соотношением

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \tag{36,3}$$

Подставляя (36,3) в (36,1), находим уравнение, которому удовлетворяет потенциал постоянного электрического поля:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho. \tag{36,4}$$

Это уравнение носит название *уравнения Пуассона*. В пустоте, т. е. при $\rho = 0$, потенциал удовлетворяет *уравнению Лапласа*

$$\Delta\varphi = 0. \tag{36,5}$$

Из последнего уравнения следует, в частности, что потенциал электрического поля нигде не может иметь ни максимума, ни минимума. Действительно, для того чтобы φ имело экстремальное значение, необходимо, чтобы все первые производные от φ по координатам были равны нулю, а вторые производные $\partial^2\varphi/\partial x^2$, $\partial^2\varphi/\partial y^2$, $\partial^2\varphi/\partial z^2$ имели одинаковый знак. Последнее, однако, невозможно, так как при этом не может быть удовлетворено уравнение (36,5).

Определим теперь поле, создаваемое точечным зарядом. Из соображений симметрии ясно, что оно будет направлено в каждой точке по радиус-вектору, проведенному из точки, в которой находится заряд e. Из тех же соображений ясно, что абсолютная величина E поля будет зависеть только от расстояния R до заряда. Для нахождения этой абсолютной величины применим уравнение (36,1) в интегральной форме (30,5). Поток электрического поля через шаровую поверхность с радиусом R, проведенную вокруг заряда e, равен $4\pi R^2 E$; этот поток должен быть равен $4\pi e$. Отсюда находим:

$$E = \frac{e}{R^2}.$$

В векторном виде:

$$\mathbf{E} = \frac{e\mathbf{R}}{R^3}. \tag{36,6}$$

Таким образом, поле, создаваемое точечным зарядом, обратно пропорционально квадрату, расстояния от этого заряда. Это — так называемый *закон Кулона*. Потенциал этого поля

$$\varphi = \frac{e}{R}. \tag{36,7}$$

Если мы имеем систему зарядов, то создаваемое ею поле, согласно принципу суперпозиции, равно сумме полей, создаваемых каждым из зарядов в отдельности. В частности, потенциал такого поля равен

$$\varphi = \sum_a \frac{e_a}{R_a},$$

где R_a — расстояние от заряда e_a до точки, в которой мы ищем потенциал. Если ввести плотность заряда ρ, то эта формула приобретает вид

$$\varphi = \int \frac{\rho}{R}\, dV, \tag{36,8}$$

где R — расстояние от элемента объема dV до данной точки («точки наблюдения») поля.

Отметим здесь математическое соотношение, получающееся при подстановке в (36,4) значений ρ и φ для точечного заряда, т. е. $\rho = e\delta(\mathbf{R})$ и $\varphi = e/R$. Мы находим тогда:

$$\Delta \frac{1}{R} = -4\pi\delta(\mathbf{R}). \tag{36,9}$$

§ 37. Электростатическая энергия зарядов

Определим энергию системы зарядов. При этом будем исходить из представления об энергии поля, т. е. из выражения (31,5) для плотности энергии. Именно, энергия системы зарядов должна быть равна

$$U = \frac{1}{8\pi} \int E^2\, dV,$$

где $\mathbf{E}$ есть поле, создаваемое этими зарядами, а интеграл берется по всему пространству. Подставляя сюда $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$, можно преобразовать U следующим образом:

$$U = -\frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E} \operatorname{grad}\varphi\, dV = -\frac{1}{8\pi} \int \operatorname{div}(\mathbf{E}\varphi)\, dV + \frac{1}{8\pi} \int \varphi \operatorname{div}\mathbf{E}\, dV.$$

Первый из этих интегралов согласно теореме Гаусса равен интегралу от $\mathbf{E}\varphi$ по поверхности, ограничивающей объем интегрирования; но поскольку интегрирование производится по всему