

В векторном виде:

$$\mathbf{E} = \frac{e\mathbf{R}}{R^3}. \quad (36,6)$$

Таким образом, поле, создаваемое точечным зарядом, обратно пропорционально квадрату, расстояния от этого заряда. Это — так называемый закон Кулона. Потенциал этого поля

$$\Phi = \frac{e}{R}. \quad (36,7)$$

Если мы имеем систему зарядов, то создаваемое ею поле, согласно принципу суперпозиции, равно сумме полей, создаваемых каждым из зарядов в отдельности. В частности, потенциал такого поля равен

$$\Phi = \sum_a \frac{e_a}{R_a},$$

где  $R_a$  — расстояние от заряда  $e_a$  до точки, в которой мы ищем потенциал. Если ввести плотность заряда  $\rho$ , то эта формула приобретает вид

$$\Phi = \int \frac{\rho}{R} dV, \quad (36,8)$$

где  $R$  — расстояние от элемента объема  $dV$  до данной точки («точки наблюдения») поля.

Отметим здесь математическое соотношение, получающееся при подстановке в (36,4) значений  $\rho$  и  $\Phi$  для точечного заряда, т. е.  $\rho = e\delta(\mathbf{R})$  и  $\Phi = e/R$ . Мы находим тогда:

$$\Delta \frac{1}{R} = -4\pi\delta(\mathbf{R}). \quad (36,9)$$

### § 37. Электростатическая энергия зарядов

Определим энергию системы зарядов. При этом будем исходить из представления об энергии поля, т. е. из выражения (31,5) для плотности энергии. Именно, энергия системы зарядов должна быть равна

$$U = \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV,$$

где  $\mathbf{E}$  есть поле, создаваемое этими зарядами, а интеграл берется по всему пространству. Подставляя сюда  $\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi$ , можно преобразовать  $U$  следующим образом:

$$U = -\frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E} \cdot \text{grad } \Phi dV = -\frac{1}{8\pi} \int \text{div}(\mathbf{E}\Phi) dV + \frac{1}{8\pi} \int \Phi \text{div } \mathbf{E} dV.$$

Первый из этих интегралов согласно теореме Гаусса равен интегралу от  $\mathbf{E}\Phi$  по поверхности, ограничивающей объем интегрирования; но поскольку интегрирование производится по всему

пространству, а на бесконечности поле равно нулю, то этот интеграл исчезает. Подставляя во второй интеграл  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$ , находим следующее выражение для энергии системы зарядов:

$$U = \frac{1}{2} \int \rho \Phi dV. \quad (37,1)$$

Для системы точечных зарядов  $e_a$  можно вместо интеграла написать сумму по зарядам:

$$U = \frac{1}{2} \sum e_a \Phi_a, \quad (37,2)$$

где  $\Phi_a$  — потенциал поля, создаваемого всеми зарядами в точке, где находится заряд  $e_a$ .

Если применить полученную формулу к одной элементарной заряженной частице (скажем, электрону) и полю, производимому им самим, мы приедем к выводу, что частица должна обладать «собственной» потенциальной энергией, равной  $e\varphi/2$ , где  $\varphi$  — потенциал производимого зарядом поля в месте, где он сам находится. Но мы знаем, что в теории относительности всякую элементарную частицу надо рассматривать как точечную. Потенциал же  $\varphi = e/R$  ее поля в точке  $R = 0$  обращается в бесконечность. Таким образом, согласно электродинамике электрон должен был бы обладать бесконечной «собственной» энергией, а следовательно, и бесконечной массой. Физическая бессмыленность этого результата показывает, что уже основные принципы самой электродинамики приводят к тому, что ее применимость должна быть ограничена определенными пределами.

Заметим, что ввиду бесконечности получающихся из электродинамики «собственной» энергии и массы в рамках самой классической электродинамики нельзя поставить вопрос о том, является ли вся масса электрона электромагнитной (т. е. связанной с электромагнитной собственной энергией частицы)<sup>1)</sup>.

Поскольку возникновение не имеющей физического смысла бесконечной «собственной» энергии элементарной частицы связано с тем, что такую частицу надо рассматривать как точечную, мы можем заключить, что электродинамика как логически замкнутая физическая теория становится внутренне-противоречивой при переходе к достаточно малым расстояниям. Можно поставить вопрос о том, каков порядок величины этих расстояний. На этот вопрос можно ответить, заметив, что для собственной электромагнитной энергии электрона надо было бы получить

<sup>1)</sup> С чисто формальной точки зрения конечность массы электрона можно трактовать путем введения бесконечной отрицательной массы неэлектромагнитного происхождения, компенсирующей бесконечность электромагнитной массы («перенормировка» массы). Мы увидим, однако, в дальнейшем (§ 75), что этим способом не ликвидируются все внутренние противоречия классической электродинамики.

значение порядка величины энергии покоя  $mc^2$ . Если, с другой стороны, рассматривать электрон, как обладающий некоторыми размерами  $R_0$ , то его собственная потенциальная энергия была бы порядка  $e^2/R_0$ . Из требования, чтобы обе эти величины были одного порядка,  $e^2/R_0 \sim mc^2$ , находим:

$$R_0 \sim \frac{e^2}{mc^2}. \quad (37,3)$$

Эти размеры (их называют «радиусом» электрона) определяют границы применимости электродинамики к электрону, следующие уже из ее собственных основных принципов. Надо, однако, иметь в виду, что в действительности пределы применимости излагаемой здесь классической электродинамики лежат еще гораздо выше вследствие квантовых явлений<sup>1)</sup>.

Вернемся снова к формуле (37,2). Стоящие в ней потенциалы  $\varphi_a$ , согласно закону Кулона, равны

$$\varphi_a = \sum \frac{e_b}{R_{ab}}, \quad (37,4)$$

где  $R_{ab}$  — расстояние между зарядами  $e_a$ ,  $e_b$ . Выражение для энергии (37,2) состоит из двух частей. Во-первых, оно содержит бесконечную постоянную — собственную энергию зарядов, — не зависящую от их взаимного расположения. Вторая часть есть энергия взаимодействия зарядов, зависящая от их расположения. Только эта часть и имеет, очевидно, физический интерес. Она равна

$$U' = \frac{1}{2} \sum e_a \varphi'_a, \quad (37,5)$$

где

$$\varphi'_a = \sum_{b \neq a} \frac{e_b}{R_{ab}} \quad (37,6)$$

есть потенциал в точке нахождения  $e_a$ , создаваемый всеми зарядами, за исключением  $e_a$ . Иначе можно написать:

$$U' = \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} \frac{e_a e_b}{R_{ab}}. \quad (37,7)$$

В частности, энергия взаимодействия двух зарядов

$$U' = \frac{e_1 e_2}{R_{12}}. \quad (37,8)$$

<sup>1)</sup> Квантовые эффекты становятся существенными при расстояниях порядка  $\hbar/mc$ , где  $\hbar$  — постоянная Планка. Отношение этих расстояний к  $R_0$  порядка  $\hbar c/e^2 \sim 137$ .