§ 38. Поле равномерно движущегося заряда

Определим поле, создаваемое зарядом e, движущимся равномерно со скоростью V. Неподвижную систему отсчета будем называть системой K; систему отсчета, движущуюся вместе с зарядом, — системой K'. Пусть заряд находится в начале координат системы K'; система K' движется относительно K параллельно оси x; оси y и z параллельны y' и z'. В момент времени $t=0$ начала обеих систем совпадают. Координаты заряда в системе K, следовательно, $x=Vt$, $y=z=0$. В системе K' мы имеем постоянное электрическое поле с векторным потенциалом $\mathbf{A}'=0$ и скалярным $\varphi'=e/R'$, где $R'^2=x'^2+y'^2+z'^2$. В системе K согласно формулам (24,1) с $\mathbf{A}'=0$

$$\varphi=\frac{\varphi'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}=\frac{e}{R'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \tag{38,1}$$

Мы должны теперь выразить R' через координаты x, y, z в системе K. Согласно формулам преобразования Лоренца

$$x'=\frac{x-Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \qquad y'=y, \qquad z'=z,$$

и отсюда

$$R'^2=\frac{(x-Vt)^2+\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)(y^2+z^2)}{1-\frac{V^2}{c^2}}. \tag{38,2}$$

Подставляя это в (38,1), находим:

$$\varphi=\frac{e}{R^*}, \tag{38,3}$$

где введено обозначение

$$R^{*2}=(x-Vt)^2+\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)(y^2+z^2). \tag{38,4}$$

Векторный потенциал в системе K равен

$$\mathbf{A}=\varphi\frac{\mathbf{V}}{c}=\frac{e\mathbf{V}}{cR^*}. \tag{38,5}$$

В системе K' магнитное поле $\mathbf{H}'$ отсутствует, а электрическое

$$\mathbf{E}'=\frac{e\mathbf{R}'}{R'^3}.$$

По формулам (24,2) находим:

$$E_x = E'_x = \frac{ex'}{R'^3},$$

$$E_y = \frac{E'_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{ey'}{R'^3\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad E_z = \frac{ez'}{R'^3\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Подставляя сюда R', x', y', z', выраженные через x, y, z, находим:

$$\mathbf{E} = \left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)\frac{e\mathbf{R}}{R^{*3}}, \tag{38,6}$$

где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор от заряда e к точке наблюдения x, y, z поля (его компоненты равны $x - Vt$, y, z).

Это выражение для $\mathbf{E}$ можно написать в другом виде, введя угол θ между направлением движения и радиус-вектором $\mathbf{R}$. Очевидно, что $y^2 + z^2 = R^2 \sin^2\theta$, и потому R^{*2} можно написать в виде

$$R^{*2} = R^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\sin^2\theta\right). \tag{38,7}$$

Тогда для $\mathbf{E}$ имеем:

$$\mathbf{E} = \frac{e\mathbf{R}}{R^3}\frac{1-\frac{V^2}{c^2}}{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{3/2}}. \tag{38,8}$$

При заданном расстоянии R от заряда величина поля E возрастает с увеличением θ от нуля до $\pi/2$ (или при уменьшении от π до $\pi/2$). Наименьшее значение поле имеет в направлении, параллельном направлению движения ($\theta = 0, \pi$); оно равно

$$E_\parallel = \frac{e}{R^2}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right).$$

Наибольшим же является поле, перпендикулярное к скорости ($\theta = \pi/2$), равное

$$E_\perp = \frac{e}{R^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Отметим, что при увеличении скорости поле $E_\parallel$ падает, а $E_\perp$ возрастает. Можно сказать наглядно, что электрическое поле движущегося заряда как бы «сплющивается» по направлению движения. При скоростях V, близких к скорости света, знаменатель в формуле (38,8) близок к нулю в узком интервале значений θ вокруг значения $\theta = \pi/2$. Ширина этого интервала порядка величины

$$\Delta\theta \sim \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}.$$

Таким образом, электрическое поле быстро движущегося заряда, на заданном расстоянии от него, заметно отлично от нуля лишь в узком интервале углов вблизи экваториальной плоскости, причем ширина этого интервала падает с увеличением V как $\sqrt{1-V^2/c^2}$.

Магнитное поле в системе K равно

$$\mathbf{H}=\frac{1}{c}[\mathbf{VE}] \tag{38,9}$$

(см. (24,5)). В частности, при $V \ll c$ электрическое поле приближенно дается обычной формулой закона Кулона $\mathbf{E}=e\mathbf{R}/R^3$, и тогда магнитное поле

$$\mathbf{H}=\frac{e}{c}\frac{[\mathbf{VR}]}{R^3}. \tag{38,10}$$

Задача

Определить силу взаимодействия (в системе K) между двумя зарядами, движущимися с одинаковыми скоростями $\mathbf{V}$.

Решение. Искомую силу $\mathbf{F}$ вычисляем как силу, действующую на один из зарядов (e_1) в поле, создаваемом вторым зарядом (e_2). Имеем с помощью (38,9):

$$\mathbf{F}=e_1\mathbf{E}_2+\frac{e_1}{c}[\mathbf{VH}_2]=e_1\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)\mathbf{E}_2+\frac{e_1}{c^2}\mathbf{V}(\mathbf{VE}_2).$$

Подставив сюда $\mathbf{E}_2$ из (38,8), получим для составляющих силы в направлении движения (F_x) и перпендикулярно к нему (F_y):

$$F_x=\frac{e_1e_2}{R^2}\frac{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)\cos\theta}{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{3/2}},\qquad F_y=\frac{e_1e_2}{R^2}\frac{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^2\sin\theta}{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{3/2}},$$

где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор от e_2 к e_1, а θ — угол между $\mathbf{R}$ и $\mathbf{V}$.

§ 39. Движение в кулоновом поле

Рассмотрим движение частицы с массой m и зарядом e в поле, создаваемом другим зарядом e'; мы предполагаем, что масса последнего настолько велика, что его можно считать неподвижным. Тогда задача сводится к исследованию движения заряда e в центрально-симметричном электрическом поле с потенциалом $\varphi=e'/r$.

Полная энергия частицы равна

$$\mathscr{E}=c\sqrt{p^2+m^2c^2}+\frac{\alpha}{r},$$

где $\alpha=ee'$. Если пользоваться полярными координатами в плоскости движения частицы, то, как известно из механики,

$$p^2=\frac{M^2}{r^2}+p_r^2,$$