

Таким образом, электрическое поле быстро движущегося заряда, на заданном расстоянии от него, заметно отлично от нуля лишь в узком интервале углов вблизи экваториальной плоскости, причем ширина этого интервала падает с увеличением V как $\sqrt{1 - V^2/c^2}$.

Магнитное поле в системе K равно

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} [\mathbf{V} \mathbf{E}] \quad (38,9)$$

(см. (24,5)). В частности, при $V \ll c$ электрическое поле приближенно дается обычной формулой закона Кулона $\mathbf{E} = e\mathbf{R}/R^3$, и тогда магнитное поле

$$\mathbf{H} = \frac{e}{c} \frac{[\mathbf{V} \mathbf{R}]}{R^3}. \quad (38,10)$$

Задача

Определить силу взаимодействия (в системе K) между двумя зарядами, движущимися с одинаковыми скоростями V .

Решение. Искомую силу \mathbf{F} вычисляем как силу, действующую на один из зарядов (e_1) в поле, создаваемом вторым зарядом (e_2). Имеем с помощью (38,9):

$$\mathbf{F} = e_1 \mathbf{E}_2 + \frac{e_1}{c} [\mathbf{V} \mathbf{H}_2] = e_1 \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \mathbf{E}_2 + \frac{e_1}{c^2} \mathbf{V} (\mathbf{V} \mathbf{E}_2).$$

Подставив сюда \mathbf{E}_2 из (38,8), получим для составляющих силы в направлении движения (F_x) и перпендикулярно к нему (F_y):

$$F_x = \frac{e_1 e_2}{R^2} \frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \cos \theta}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{1/2}}, \quad F_y = \frac{e_1 e_2}{R^2} \frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right)^2 \sin \theta}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{1/2}},$$

где R — радиус-вектор от e_2 к e_1 , а θ — угол между \mathbf{R} и \mathbf{V} .

§ 39. Движение в кулоновом поле

Рассмотрим движение частицы с массой m и зарядом e в поле, создаваемом другим зарядом e' ; мы предполагаем, что масса последнего настолько велика, что его можно считать неподвижным. Тогда задача сводится к исследованию движения заряда e в центрально-симметричном электрическом поле с потенциалом $\Phi = e'/r$.

Полная энергия частицы равна

$$\mathcal{E} = e \sqrt{p^2 + m^2 c^2} + \frac{\alpha}{r},$$

где $\alpha = ee'$. Если пользоваться полярными координатами в плоскости движения частицы, то, как известно из механики,

$$p^2 = \frac{M^2}{r^2} + p_r^2,$$

где p_r — радиальная компонента импульса, а M — постоянный момент импульса частицы. Тогда

$$\mathcal{E} = c \sqrt{p_r^2 + \frac{M^2}{r^2} + m^2c^2} + \frac{\alpha}{r}. \quad (39.1)$$

Выясним вопрос о том, может ли частица при своем движении приближаться сколь угодно близко к центру. Прежде всего очевидно, что это во всяком случае невозможно, если заряды e и e' отталкиваются, т. е. e и e' — одного знака. Далее, в случае притяжения (e и e' имеют различные знаки) неограниченное приближение к центру невозможно, если $Mc > |\alpha|$; действительно, в этом случае первый член в (39.1) всегда больше второго, и при $r \rightarrow 0$ правая сторона этого равенства стремилась бы к бесконечности. Напротив, если $Mc < |\alpha|$, то при $r \rightarrow 0$ это выражение может оставаться конечным (при этом, разумеется, стремится к бесконечности p_r). Таким образом, если

$$Mc < |\alpha|, \quad (39.2)$$

то частица при своем движении «падает» на притягивающий ее заряд, — в противоположность тому, что в нерелятивистской механике в кулоновом поле такое падение вообще невозможно (за исключением только случая $M = 0$, когда частица e летит прямо на частицу e').

Полное определение движения заряда в кулоновом поле удобнее всего производить, исходя из уравнения Гамильтона — Якоби. Выберем полярные координаты r, φ в плоскости движения. Уравнение Гамильтона — Якоби (16.11) имеет вид

$$-\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\alpha}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 + m^2c^2 = 0.$$

Ищем S в виде

$$S = -\mathcal{E}t + M\varphi + f(r),$$

где \mathcal{E} и M — постоянные энергия и момент импульса движущейся частицы. В результате находим:

$$S = -\mathcal{E}t + M\varphi + \int \sqrt{\frac{1}{c^2} \left(\mathcal{E} - \frac{\alpha}{r} \right)^2 - \frac{M^2}{r^2} - m^2c^2} \cdot dr. \quad (39.3)$$

Траектория определяется уравнением $\partial S / \partial M = \text{const}$. Интегрирование в (39.3) приводит к следующим результатам для траекторий:

a) если $Mc > |\alpha|$:

$$(c^2M^2 - \alpha^2) \frac{1}{r} = c \sqrt{(M\mathcal{E})^2 - m^2c^2(M^2c^2 - \alpha^2)} \times \\ \times \cos \left(\varphi \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{c^2M^2}} \right) - \mathcal{E}\alpha; \quad (39.4)$$

б) если $Mc < |\alpha|$:

$$(a^2 - c^2 M^2) \frac{1}{r} = \pm c \sqrt{(M\mathcal{E})^2 + m^2 c^2 (a^2 - M^2 c^2)} \operatorname{ch} \left(\phi \sqrt{\frac{a^2}{c^2 M^2} - 1} \right) + \mathcal{E} \alpha; \quad (39,5)$$

в) если $Mc = |\alpha|$:

$$\frac{2\mathcal{E}\alpha}{r} = \mathcal{E}^2 - m^2 c^4 - \phi^2 \left(\frac{\mathcal{E}\alpha}{cM} \right)^2. \quad (39,6)$$

Постоянная интегрирования заключена в произвольном выборе начала отсчета угла ϕ .

В (39,4) выбор знака перед корнем несуществен, так как тоже связан с выбором начала отсчета угла ϕ под знаком cos. Изображаемая этим уравнением траектория в случае притяжения ($a < 0$) лежит целиком при конечных значениях r (финитное движение), если $\mathcal{E} < mc^2$. Если же $\mathcal{E} > mc^2$, то r может обращаться в бесконечность (движение инфинитно). Финитному движению соответствует в нерелятивистской механике движение по замкнутым орбитам (эллипсам). В релятивистской же механике траектория никогда не может быть замкнутой — из (39,4) видно, что при изменении угла ϕ на 2π расстояние r от центра не возвращается к исходному значению. Вместо эллипсов мы имеем здесь орбиты в виде незамкнутых «розеток». Таким образом, в то время как в нерелятивистской механике финитное движение в кулоновом поле происходит по замкнутым орбитам, в релятивистской механике кулоново поле теряет это свое свойство.

В (39,5) перед корнем должен быть выбран знак + при $\alpha < 0$ и знак — при $\alpha > 0$ (другой выбор знаков соответствовал бы измененному знаку перед корнем в (39,1)).

При $\alpha < 0$ траектории (39,5) и (39,6) представляют собой спирали с радиусом r , стремящимся к нулю при $\phi \rightarrow \infty$. Время же, в течение которого происходит «падение» заряда в начало координат, конечно. Убедиться в этом можно, замечая, что зависимость координаты r от времени определяется равенством $dS/d\mathcal{E} = \text{const}$; подставляя сюда (39,3), увидим, что время определяется интегралом, сходящимся при $r \rightarrow 0$.

Задачи

1. Определить угол отклонения заряда, пролетающего в кулоновом поле отталкивания ($\alpha > 0$).

Решение. Угол отклонения χ равен $\chi = \pi - 2\Phi_0$, где $2\Phi_0$ — угол между двумя асимптотами траектории (39,4). Находим:

$$\chi = \pi - \frac{2cM}{\sqrt{c^2 M^2 - a^2}} \operatorname{arctg} \frac{v \sqrt{c^2 M^2 - a^2}}{ca},$$

где v — скорость заряда на бесконечности.

2. Определить эффективное сечение рассеяния на малые углы при рассеянии частиц кулоновым полем.

Решение. Эффективное сечение $d\sigma$ есть отношение числа частиц, рассеянных (в 1 с) в данный элемент $d\Omega$ телесного угла, к плотности рассеиваемого потока частиц (т. е. к числу частиц, проходящих в 1 с через 1 см² площади поперечного сечения пучка частиц).

Поскольку угол χ отклонения частицы при ее пролете через поле определяется «прицельным расстоянием» r (т. е. расстоянием от центра до прямой, по которой двигался бы заряд в отсутствие поля), то

$$d\sigma = 2\pi r d\rho = 2\pi \rho \frac{d\rho}{d\chi} d\chi = \rho \frac{d\rho}{d\chi} \frac{d\Omega}{\sin \chi},$$

где $d\Omega = 2\pi \sin \chi d\chi$ (см. I § 18). Угол отклонения (если он мал) можно считать равным отношению приращения импульса к его первоначальному значению. Приращение импульса равно интегралу по времени от силы, действующей на заряд в направлении, перпендикулярном к направлению движения; последняя приближенно равна $\frac{a}{r^2} \frac{\rho}{r}$. Таким образом, имеем:

$$\chi = \frac{1}{\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ap dt}{(\rho^2 + v^2 t^2)^{1/2}} = \frac{2a}{\rho v}$$

(v — скорость частиц). Отсюда находим эффективное сечение для малых χ :

$$d\sigma = 4 \left(\frac{a}{\rho v} \right)^2 \frac{d\Omega}{\chi^4}.$$

В нерелятивистском случае $\rho \approx mv$, и это выражение совпадает с получающимся по формуле Резерфорда при малых χ (см. I § 19).

§ 40. Дипольный момент

Рассмотрим поле, создаваемое системой зарядов на расстояниях, больших по сравнению с размерами системы.

Введем систему координат с началом где-нибудь внутри системы зарядов. Радиус-векторы отдельных зарядов пусть будут \mathbf{r}_a . Потенциал поля, создаваемого всеми зарядами в точке с радиус-вектором \mathbf{R}_0 , равен

$$\Phi = \sum \frac{e_a}{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_a|} \quad (40,1)$$

(суммирование производится по всем зарядам); здесь $(\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_a)$ — радиус-векторы от зарядов e_a к точке, где мы ищем потенциал.

Мы должны исследовать это выражение для больших \mathbf{R}_0 ($\mathbf{R}_0 \gg \mathbf{r}_a$). Для этого разложим его в ряд по степеням $\mathbf{r}_a/\mathbf{R}_0$, воспользовавшись формулой

$$f(\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}) \approx f(\mathbf{R}_0) - \mathbf{r} \operatorname{grad} f(\mathbf{R}_0)$$

(в grad дифференцирование производится по координатам конца вектора \mathbf{R}_0). С точностью до членов первого порядка

$$\Phi = \frac{\sum e_a}{R_0} - \sum e_a \mathbf{r}_a \operatorname{grad} \frac{1}{R_0}. \quad (40,2)$$