

2. Определить эффективное сечение рассеяния на малые углы при рассеянии частиц кулоновым полем.

Решение. Эффективное сечение $d\sigma$ есть отношение числа частиц, рассеянных (в 1 с) в данный элемент $d\Omega$ телесного угла, к плотности рассеиваемого потока частиц (т. е. к числу частиц, проходящих в 1 с через 1 см² площади поперечного сечения пучка частиц).

Поскольку угол χ отклонения частицы при ее пролете через поле определяется «прицельным расстоянием» r (т. е. расстоянием от центра до прямой, по которой двигался бы заряд в отсутствие поля), то

$$d\sigma = 2\pi r d\rho = 2\pi \rho \frac{d\rho}{d\chi} d\chi = \rho \frac{d\rho}{d\chi} \frac{d\Omega}{\sin \chi},$$

где $d\Omega = 2\pi \sin \chi d\chi$ (см. I § 18). Угол отклонения (если он мал) можно считать равным отношению приращения импульса к его первоначальному значению. Приращение импульса равно интегралу по времени от силы, действующей на заряд в направлении, перпендикулярном к направлению движения; последняя приближенно равна $\frac{a}{r^2} \frac{\rho}{r}$. Таким образом, имеем:

$$\chi = \frac{1}{\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ap dt}{(\rho^2 + v^2 t^2)^{1/2}} = \frac{2a}{\rho v}$$

(v — скорость частиц). Отсюда находим эффективное сечение для малых χ :

$$d\sigma = 4 \left(\frac{a}{\rho v} \right)^2 \frac{d\Omega}{\chi^4}.$$

В нерелятивистском случае $\rho \approx mv$, и это выражение совпадает с получающимся по формуле Резерфорда при малых χ (см. I § 19).

§ 40. Дипольный момент

Рассмотрим поле, создаваемое системой зарядов на расстояниях, больших по сравнению с размерами системы.

Введем систему координат с началом где-нибудь внутри системы зарядов. Радиус-векторы отдельных зарядов пусть будут \mathbf{r}_a . Потенциал поля, создаваемого всеми зарядами в точке с радиус-вектором \mathbf{R}_0 , равен

$$\Phi = \sum \frac{e_a}{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_a|} \quad (40,1)$$

(суммирование производится по всем зарядам); здесь $(\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_a)$ — радиус-векторы от зарядов e_a к точке, где мы ищем потенциал.

Мы должны исследовать это выражение для больших \mathbf{R}_0 ($\mathbf{R}_0 \gg \mathbf{r}_a$). Для этого разложим его в ряд по степеням $\mathbf{r}_a/\mathbf{R}_0$, воспользовавшись формулой

$$f(\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}) \approx f(\mathbf{R}_0) - \mathbf{r} \operatorname{grad} f(\mathbf{R}_0)$$

(в grad дифференцирование производится по координатам конца вектора \mathbf{R}_0). С точностью до членов первого порядка

$$\Phi = \frac{\sum e_a}{R_0} - \sum e_a \mathbf{r}_a \operatorname{grad} \frac{1}{R_0}. \quad (40,2)$$

Сумма

$$\mathbf{d} = \sum e_a \mathbf{r}_a \quad (40.3)$$

носит название *дипольного момента* системы зарядов. Существенно, что если сумма $\sum e_a$ всех зарядов равна нулю, то дипольный момент не зависит от выбора начала координат. Действительно, радиус-векторы \mathbf{r}_a и \mathbf{r}'_a одного и того же заряда в двух разных системах координат связаны друг с другом соотношением

$$\mathbf{r}'_a = \mathbf{r}_a + \mathbf{a},$$

где \mathbf{a} — некоторый постоянный вектор. Поэтому если $\sum e_a = 0$, то дипольный момент в обеих системах одинаков:

$$\mathbf{d}' = \sum e_a \mathbf{r}'_a = \sum e_a \mathbf{r}_a + \mathbf{a} \sum e_a = \mathbf{d}.$$

Если обозначить посредством e_a^+ , \mathbf{r}_a^+ и $-e_a^-$, \mathbf{r}_a^- положительные и отрицательные заряды системы и их радиус-векторы, то можно написать дипольный момент в виде

$$\mathbf{d} = \sum e_a^+ \mathbf{r}_a^+ - \sum e_a^- \mathbf{r}_a^- = \mathbf{R}^+ \sum e_a^+ - \mathbf{R}^- \sum e_a^-, \quad (40.4)$$

где

$$\mathbf{R}^+ = \frac{\sum e_a^+ \mathbf{r}_a^+}{\sum e_a^+}, \quad \mathbf{R}^- = \frac{\sum e_a^- \mathbf{r}_a^-}{\sum e_a^-} \quad (40.5)$$

— радиус-векторы «центров зарядов» положительных и отрицательных. Если $\sum e_a^+ = \sum e_a^- = e$, то

$$\mathbf{d} = e \mathbf{R}_{+-}, \quad (40.6)$$

где $\mathbf{R}_{+-} = \mathbf{R}^+ - \mathbf{R}^-$ есть радиус-вектор от центра отрицательных к центру положительных зарядов. В частности, если имеются всего два заряда, то \mathbf{R}_{+-} есть радиус-вектор между ними.

Если полный заряд системы равен нулю, то потенциал ее поля на больших расстояниях

$$\Phi = -\mathbf{d} \nabla \frac{1}{R_0} = \frac{\mathbf{d} \mathbf{R}_0}{R_0^3}. \quad (40.7)$$

Напряженность поля

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \frac{\mathbf{d} \mathbf{R}_0}{R_0^3} = -\frac{1}{R_0^3} \operatorname{grad} (\mathbf{d} \mathbf{R}_0) - (\mathbf{d} \mathbf{R}_0) \operatorname{grad} \frac{1}{R_0^3},$$

или окончательно

$$\mathbf{E} = \frac{3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}) \mathbf{n} - \mathbf{d}}{R_0^3}, \quad (40.8)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор в направлении \mathbf{R}_0 . Полезно также указать, что ее можно представить, до выполнения дифференцирований, в виде

$$\mathbf{E} = (\mathbf{d}\nabla) \frac{1}{R_0}. \quad (40,9)$$

Таким образом, потенциал поля, создаваемого системой с равным нулю полным зарядом, на больших расстояниях обратно пропорционален квадрату, а напряженность поля — кубу расстояния. Это поле обладает аксиальной симметрией вокруг направления \mathbf{d} . В плоскости, проходящей через это направление (которое выберем в качестве оси z), компоненты вектора \mathbf{E} :

$$E_z = d \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{R_0^3}, \quad E_x = d \frac{3 \sin \theta \cos \theta}{R_0^3}. \quad (40,10)$$

Радиальная же и тангенциальная составляющие в этой плоскости

$$E_R = d \frac{2 \cos \theta}{R_0^3}, \quad E_\theta = -d \frac{\sin \theta}{R_0^3}. \quad (40,11)$$

§ 41. Мультипольные моменты

В разложении потенциала по степеням $1/R_0$

$$\Phi = \Phi^{(0)} + \Phi^{(1)} + \Phi^{(2)} + \dots \quad (41,1)$$

член $\Phi^{(n)}$ пропорционален $1/R_0^{n+1}$. Мы видели, что первый член, $\Phi^{(0)}$, определяется суммой всех зарядов; второй, $\Phi^{(1)}$, называемый дипольным потенциалом системы, определяется ее дипольным моментом.

Третий член разложения равен

$$\Phi^{(2)} = \frac{1}{2} \sum e x_\alpha x_\beta \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{1}{R_0}, \quad (41,2)$$

где сумма берется по всем зарядам; индекс, указывающий номер заряда, мы здесь опустили; x_α — компоненты вектора \mathbf{r} , а X_α — вектора \mathbf{R}_0 . Эта часть потенциала обычно называется квадрупольным потенциалом. Если сумма зарядов и дипольный момент системы равны нулю, то разложение начинается с $\Phi^{(2)}$.

В выражение (41,2) входят шесть величин $\sum e x_\alpha x_\beta$. Легко, однако, видеть, что в действительности поле зависит не от шести независимых величин, а только от пяти. Это следует из того, что функция $1/R_0$ удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta \frac{1}{R_0} = \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{1}{R_0} = 0.$$