где $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{R}_0$. Полезно также указать, что ее можно представить, до выполнения дифференцирований, в виде

$$\mathbf{E} = (\mathbf{d}\nabla)\nabla\frac{1}{R_0}. \tag{40,9}$$

Таким образом, потенциал поля, создаваемого системой с равным нулю полным зарядом, на больших расстояниях обратно пропорционален квадрату, а напряженность поля — кубу расстояния. Это поле обладает аксиальной симметрией вокруг направления $\mathbf{d}$. В плоскости, проходящей через это направление (которое выберем в качестве оси z), компоненты вектора $\mathbf{E}$:

$$E_z = d\frac{3\cos^2\theta - 1}{R_0^3}, \quad E_x = d\frac{3\sin\theta\cos\theta}{R_0^3}. \tag{40,10}$$

Радиальная же и тангенциальная составляющие в этой плоскости

$$E_R = d\frac{2\cos\theta}{R_0^3}, \quad E_\theta = -d\frac{\sin\theta}{R_0^3}. \tag{40,11}$$

§ 41. Мультипольные моменты

В разложении потенциала по степеням $1/R_0$

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + \ldots \tag{41,1}$$

член $\varphi^{(n)}$ пропорционален $1/R_0^{n+1}$. Мы видели, что первый член, $\varphi^{(0)}$, определяется суммой всех зарядов; второй, $\varphi^{(1)}$, называемый дипольным потенциалом системы, определяется ее дипольным моментом.

Третий член разложения равен

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{2}\sum e x_\alpha x_\beta \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}\frac{1}{R_0}, \tag{41,2}$$

где сумма берется по всем зарядам; индекс, указывающий номер заряда, мы здесь опустили; x_α — компоненты вектора $\mathbf{r}$, а X_α — вектора $\mathbf{R}_0$. Эта часть потенциала обычно называется квадрупольным потенциалом. Если сумма зарядов и дипольный момент системы равны нулю, то разложение начинается с $\varphi^{(2)}$.

В выражение (41,2) входят шесть величин $\sum e x_\alpha x_\beta$. Легко, однако, видеть, что в действительности поле зависит не от шести независимых величин, а только от пяти. Это следует из того, что функция $1/R_0$ удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta\frac{1}{R_0} \equiv \delta_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}\frac{1}{R_0} = 0.$$

Мы можем поэтому написать $\varphi^{(2)}$ в виде

$$\varphi^{(2)}=\frac{1}{2}\sum e\left(x_\alpha x_\beta-\frac{1}{3}r^2\delta_{\alpha\beta}\right)\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha\,\partial X_\beta}\frac{1}{R_0}.$$

Тензор

$$D_{\alpha\beta}=\sum e\,(3x_\alpha x_\beta-r^2\delta_{\alpha\beta}) \tag{41,3}$$

называется *квадрупольным моментом* системы. Из определения $D_{\alpha\beta}$ следует, что сумма его диагональных компонент равна нулю:

$$D_{\alpha\alpha}=0. \tag{41,4}$$

Симметричный тензор $D_{\alpha\beta}$ имеет поэтому всего пять независимых компонент. С его помощью можно написать:

$$\varphi^{(2)}=\frac{D_{\alpha\beta}}{6}\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha\,\partial X_\beta}\frac{1}{R_0} \tag{41,5}$$

или, произведя дифференцирование

$$\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha\,\partial X_\beta}\frac{1}{R_0}=\frac{3X_\alpha X_\beta}{R_0^5}-\frac{\delta_{\alpha\beta}}{R_0^3}$$

и учитывая, что $\delta_{\alpha\beta}D_{\alpha\beta}=D_{\alpha\alpha}=0$,

$$\varphi^{(2)}=\frac{D_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta}{2R_0^3}. \tag{41,6}$$

Как и всякий симметричный трехмерный тензор, тензор $D_{\alpha\beta}$ может быть приведен к главным осям. При этом в силу условия (41,4) в общем случае лишь два из трех главных значений независимы. Если же система зарядов симметрична относительно некоторой оси (ось z)[1]), то она же является одной из главных осей тензора $D_{\alpha\beta}$, положение двух других осей в плоскости xy произвольно, и все три главных значения связаны между собой:

$$D_{xx}=D_{yy}=-\frac{1}{2}D_{zz}. \tag{41,7}$$

Обозначая компоненту D_{zz} как D (ее называют обычно в этом случае просто квадрупольным моментом), получим потенциал в виде

$$\varphi^{(2)}=\frac{D}{4R_0^3}(3\cos^2\theta-1)=\frac{D}{2R_0^3}P_2(\cos\theta), \tag{41,8}$$

где θ — угол между $\mathbf{R}_0$ и осью z, а P_2 — полином Лежандра.

Подобно тому как это было сделано в предыдущем параграфе для дипольного момента, легко убедиться в том, что квадру-

---

[1]) Имеется в виду ось симметрии любого порядка выше второго.

польный момент системы не зависит от выбора начала координат, если равны нулю как полный заряд, так и дипольный момент системы.

Аналогичным образом можно было бы написать следующие члены разложения (41,1). l-й член разложения определяется тензором (так называемым тензором 2^l-польного момента) l-го ранга, симметричным по всем своим индексам и обращающимся в нуль при свертывании по любой паре индексов; можно показать, что такой тензор обладает $2l+1$ независимыми компонентами[1]).

Мы напишем, однако, здесь общий член разложения потенциала в другом виде, использовав известную из теории сферических функций формулу

$$\frac{1}{|\mathbf{R}_0-\mathbf{r}|}=\frac{1}{\sqrt{R_0^2+r^2-2rR_0\cos\chi}}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r^l}{R_0^{l+1}}P_l(\cos\chi), \qquad (41,9)$$

где χ — угол между $\mathbf{R}_0$ и $\mathbf{r}$. Введем сферические углы Θ, Φ и θ, φ, образуемые соответственно векторами $\mathbf{R}_0$ и $\mathbf{r}$ с фиксированными осями координат, и воспользуемся известной теоремой сложения для сферических функций:

$$P_l(\cos\chi)=\sum_{m=-l}^{l}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}P_l^{|m|}(\cos\Theta)P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{-im(\Phi-\varphi)}, \qquad (41,10)$$

где P_l^m — присоединенные полиномы Лежандра. Введем также сферические функции[2])

$$Y_{lm}(\theta,\varphi)=(-1)^m i^l\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi}, \quad m\geqslant 0,$$
$$Y_{l,-|m|}(\theta,\varphi)=(-1)^{l-m}Y^*_{l|m|}. \qquad (41,11)$$

Тогда разложение (41,9) примет вид

$$\frac{1}{|\mathbf{R}_0-\mathbf{r}|}=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{r^l}{R_0^{l+1}}\frac{4\pi}{2l+1}Y^*_{lm}(\Theta,\Phi)Y_{lm}(\theta,\varphi).$$

Произведя такое разложение в каждом члене суммы (40,1), получим окончательно следующее выражение для l-го члена разложения потенциала:

$$\varphi^{(l)}=\frac{1}{R_0^{l+1}}\sum_{m=-l}^{l}\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}Q_m^{(l)}Y^*_{lm}(\Theta,\Phi), \qquad (41,12)$$

---

[1]) Такой тензор называют неприводимым. Обращение в нуль при свертывании означает, что из его компонент нельзя составить компонент какого-либо тензора более низкого ранга.

[2]) В соответствии с определением, принятым в квантовой механике.

где

$$Q_m^{(l)} = \sum_a e_a r_a^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{lm}(\theta_a, \varphi_a). \tag{41,13}$$

Совокупность $2l+1$ величин $Q_m^{(l)}$ составляет 2^l-польный момент системы зарядов.

Определенные таким образом величины $Q_m^{(1)}$ связаны с компонентами вектора дипольного момента $\mathbf{d}$ формулами

$$Q_0^{(1)} = id_z, \quad Q_{\pm 1}^{(1)} = \mp \frac{i}{\sqrt{2}}(d_x \pm id_y). \tag{41,14}$$

Величины же $Q_m^{(2)}$ связаны с компонентами тензора $D_{\alpha\beta}$ соотношениями

$$\begin{gathered} Q_0^{(2)} = -\frac{1}{2} D_{zz}, \quad Q_{\pm 1}^{(2)} = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}(D_{xz} \pm iD_{yz}), \\ Q_{\pm 2}^{(2)} = -\frac{1}{2\sqrt{6}}(D_{xx} - D_{yy} \pm 2iD_{xy}). \end{gathered} \tag{41,15}$$

Задача

Определить квадрупольный момент однородно заряженного эллипсоида относительно его центра.

Решение. Заменяя суммирование в (41,3) интегрированием по объему эллипсоида, имеем:

$$D_{xx} = \rho \int (2x^2 - y^2 - z^2)\, dx\, dy\, dz \quad \text{и т. д.}$$

Выбираем оси координат вдоль осей эллипсоида с началом в его центре; из соображений симметрии очевидно, что эти же оси являются главными осями тензора $D_{\alpha\beta}$. Преобразованием

$$x = x'a, \qquad y = y'b, \qquad z = z'c$$

интегрирование по объему эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

сводится к интегрированию по объему сферы радиуса 1

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1.$$

В результате получим:

$$D_{xx} = \frac{e}{5}(2a^2 - b^2 - c^2), \quad D_{yy} = \frac{e}{5}(2b^2 - a^2 - c^2),$$

$$D_{zz} = \frac{e}{5}(2c^2 - a^2 - b^2),$$

где $e = \frac{4\pi}{3} abc\rho$ — полный заряд эллипсоида.