§ 42. Система зарядов во внешнем поле

Рассмотрим систему зарядов, находящуюся во внешнем электрическом поле. Посредством $\varphi(\mathbf{r})$ будем теперь обозначать потенциал этого внешнего поля. Потенциальная энергия каждого из зарядов есть $e_a\varphi(\mathbf{r}_a)$, а полная потенциальная энергия системы равна

$$U = \sum_a e_a\varphi(\mathbf{r}_a). \tag{42,1}$$

Выберем снова систему координат с началом где-нибудь внутри системы зарядов; $\mathbf{r}_a$ — радиус-вектор заряда e_a в этих координатах.

Предположим, что внешнее поле слабо меняется на протяжении системы зарядов, т. е. является по отношению к этой системе квазиоднородным. Тогда мы можем разложить энергию U в ряд по степеням $\mathbf{r}_a$:

$$U = U^{(0)} + U^{(1)} + U^{(2)} + \ldots \tag{42,2}$$

В этом разложении первый член есть

$$U^{(0)} = \varphi_0 \sum_a e_a, \tag{42,3}$$

где φ_0 — значение потенциала в начале координат. В этом приближении энергия системы такова, как если бы все заряды находились в одной точке.

Второй член разложения

$$U^{(1)} = (\operatorname{grad}\varphi)_0 \cdot \sum e_a\mathbf{r}_a.$$

Введя напряженность $\mathbf{E}_0$ поля в начале координат и дипольный момент $\mathbf{d}$ системы, имеем:

$$U^{(1)} = -\,\mathbf{d}\mathbf{E}_0. \tag{42,4}$$

Полная сила, действующая на систему во внешнем квазиоднородном поле, есть, с точностью до рассмотренных членов,

$$\mathbf{F} = \mathbf{E}_0 \sum e_a + (\operatorname{grad}\mathbf{d}\mathbf{E})_0.$$

Если полный заряд равен нулю, то первый член исчезает и тогда

$$\mathbf{F} = (\mathbf{d}\nabla)\mathbf{E}, \tag{42,5}$$

т. е. сила определяется производными напряженности поля (взятыми в начале координат). Полный же момент действующих на систему сил есть

$$\mathbf{K} = \sum [\mathbf{r}_a \cdot e_a\mathbf{E}_0] = [\mathbf{d}\mathbf{E}_0], \tag{42,6}$$

т. е. определяется самой напряженностью поля.

Рассмотрим две системы с равными нулю суммами зарядов в каждой из них и дипольными моментами $\mathbf{d}_1$ и $\mathbf{d}_2$, причем их взаимное расстояние велико по сравнению с их собственными размерами. Определим потенциальную энергию U их взаимодействия. Для этого можно рассматривать одну из этих систем как находящуюся в поле второй. Тогда

$$U = -\mathbf{d}_2\mathbf{E}_1,$$

где $\mathbf{E}_1$ — поле первой системы. Подставляя для $\mathbf{E}_1$ выражение (40,8), находим:

$$U = \frac{(\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2)R^2 - 3(\mathbf{d}_1\mathbf{R})(\mathbf{d}_2\mathbf{R})}{R^5}, \tag{42,7}$$

где $\mathbf{R}$ — вектор расстояния между обеими системами.

Для случая, когда у одной из систем сумма зарядов отлична от нуля (и равна e), получаем аналогичным образом:

$$U = e\frac{\mathbf{dR}}{R^3}, \tag{42,8}$$

где $\mathbf{R}$ — вектор, направленный от диполя к заряду.

Следующий член разложения (42,1) равен

$$U^{(2)} = \frac{1}{2}\sum e x_\alpha x_\beta \frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}.$$

Здесь мы, как и в § 41, опустили индексы, указывающие номер заряда; значения вторых производных от потенциала берутся в начале координат. Но потенциал φ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\alpha^2} = \delta_{\alpha\beta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = 0.$$

Поэтому мы можем написать:

$$U^{(2)} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\sum e\left(x_\alpha x_\beta - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}r^2\right),$$

или, окончательно,

$$U^{(2)} = \frac{D_{\alpha\beta}}{6}\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}. \tag{42,9}$$

Общий член ряда (42,2) может быть выражен через определенные в предыдущем параграфе 2^l-польные моменты $D_m^{(l)}$. Для этого надо предварительно разложить потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ в ряд по шаровым функциям; общий вид такого разложения:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} r^l \sum_{m=-l}^{l} a_{lm}\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\,Y_{lm}(\theta, \varphi), \tag{42,10}$$

где r, θ, φ — сферические координаты точки, а a_{lm} — постоянные коэффициенты. Составляя сумму (42,1) и учитывая определение (41,13), получим:

$$U^{(l)} = \sum_{m=-l}^{l} a_{lm} Q_m^{(l)}. \tag{42,11}$$

§ 43. Постоянное магнитное поле

Рассмотрим магнитное поле, создаваемое зарядами, совершающими финитное движение, при котором частицы остаются все время в конечной области пространства, причем импульсы тоже остаются всегда конечными. Такое движение имеет стационарный характер, и представляет интерес рассмотреть среднее (по времени) магнитное поле $\overline{\mathbf{H}}$, создаваемое зарядами; это поле будет теперь функцией только от координат, но не от времени, т. е. будет постоянным.

Для того чтобы найти уравнения, определяющие среднее магнитное поле, усредним по времени уравнения Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}.$$

Первое из них дает просто

$$\operatorname{div} \overline{\mathbf{H}} = 0. \tag{43,1}$$

Во втором уравнении среднее значение производной $\partial \mathbf{E}/\partial t$, как и вообще производной от всякой величины, меняющейся в конечном интервале, равно нулю (см. примечание[2]) на стр. 119). Поэтому второе уравнение Максвелла приобретает вид

$$\operatorname{rot} \overline{\mathbf{H}} = \frac{4\pi}{c}\overline{\mathbf{j}}. \tag{43,2}$$

Эти два уравнения и определяют постоянное поле $\overline{\mathbf{H}}$.

Введем средний векторный потенциал $\overline{\mathbf{A}}$ согласно

$$\operatorname{rot} \overline{\mathbf{A}} = \overline{\mathbf{H}}.$$

Подставив это в уравнение (43,2), получим:

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \overline{\mathbf{A}} - \Delta \overline{\mathbf{A}} = \frac{4\pi}{c}\overline{\mathbf{j}}.$$

Но мы знаем, что векторный потенциал поля определен неоднозначно, и поэтому на него можно наложить любое дополнительное условие. На этом основании выберем потенциал $\overline{\mathbf{A}}$ так, чтобы

$$\operatorname{div} \overline{\mathbf{A}} = 0. \tag{43,3}$$