где r, θ, φ — сферические координаты точки, а a_{lm} — постоянные коэффициенты. Составляя сумму (42,1) и учитывая определение (41,13), получим:

$$U^{(l)} = \sum_{m=-l}^{l} a_{lm} Q_m^{(l)}. \tag{42,11}$$

§ 43. Постоянное магнитное поле

Рассмотрим магнитное поле, создаваемое зарядами, совершающими финитное движение, при котором частицы остаются все время в конечной области пространства, причем импульсы тоже остаются всегда конечными. Такое движение имеет стационарный характер, и представляет интерес рассмотреть среднее (по времени) магнитное поле $\overline{\mathbf{H}}$, создаваемое зарядами; это поле будет теперь функцией только от координат, но не от времени, т. е. будет постоянным.

Для того чтобы найти уравнения, определяющие среднее магнитное поле, усредним по времени уравнения Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}.$$

Первое из них дает просто

$$\operatorname{div} \overline{\mathbf{H}} = 0. \tag{43,1}$$

Во втором уравнении среднее значение производной $\partial \mathbf{E}/\partial t$, как и вообще производной от всякой величины, меняющейся в конечном интервале, равно нулю (см. примечание[2]) на стр. 119). Поэтому второе уравнение Максвелла приобретает вид

$$\operatorname{rot} \overline{\mathbf{H}} = \frac{4\pi}{c}\overline{\mathbf{j}}. \tag{43,2}$$

Эти два уравнения и определяют постоянное поле $\overline{\mathbf{H}}$.

Введем средний векторный потенциал $\overline{\mathbf{A}}$ согласно

$$\operatorname{rot} \overline{\mathbf{A}} = \overline{\mathbf{H}}.$$

Подставив это в уравнение (43,2), получим:

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \overline{\mathbf{A}} - \Delta \overline{\mathbf{A}} = \frac{4\pi}{c}\overline{\mathbf{j}}.$$

Но мы знаем, что векторный потенциал поля определен неоднозначно, и поэтому на него можно наложить любое дополнительное условие. На этом основании выберем потенциал $\overline{\mathbf{A}}$ так, чтобы

$$\operatorname{div} \overline{\mathbf{A}} = 0. \tag{43,3}$$

Тогда уравнение, определяющее векторный потенциал постоянного магнитного поля, приобретает вид

$$\Delta\bar{\mathbf{A}} = -\frac{4\pi}{c}\bar{\mathbf{j}}. \tag{43,4}$$

Решение этого уравнения легко найти, заметив, что (43,4) вполне аналогично уравнению Пуассона (36,4) для скалярного потенциала постоянного электрического поля, причем вместо плотности заряда ρ стоит плотность тока $\bar{\mathbf{j}}/c$. По аналогии с решением (36,8) уравнения Пуассона мы можем написать

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{c}\int\frac{\bar{\mathbf{j}}}{R}\,dV, \tag{43,5}$$

где R — расстояние от точки наблюдения поля до элемента объема dV.

В формуле (43,5) можно перейти от интеграла к сумме по зарядам, подставляя вместо $\mathbf{j}$ произведение $\rho\mathbf{v}$ и помня, что все заряды точечные. При этом необходимо иметь в виду, что в интеграле (43,5) R является просто переменной интегрирования и потому, конечно, не подвергается усреднению. Если же написать вместо интеграла $\int\frac{\mathbf{j}}{R}\,dV$ сумму $\sum\frac{e_a\mathbf{v}_a}{R_a}$, то R_a будут радиус-векторами отдельных частиц, меняющимися при движении зарядов. Поэтому надо писать

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{c}\sum\overline{\frac{e_a\mathbf{v}_a}{R_a}}, \tag{43,6}$$

где усредняется все выражение, стоящее под чертой.

Зная $\bar{\mathbf{A}}$, можно найти напряженность поля:

$$\bar{\mathbf{H}} = \operatorname{rot}\bar{\mathbf{A}} = \operatorname{rot}\frac{1}{c}\int\frac{\bar{\mathbf{j}}}{R}\,dV.$$

Операция rot производится по координатам точки наблюдения. Поэтому rot можно перенести под знак интеграла и при дифференцировании считать $\mathbf{j}$ постоянным. Применяя известную формулу

$$\operatorname{rot} f\mathbf{a} = f\operatorname{rot}\mathbf{a} + [\operatorname{grad} f\cdot\mathbf{a}],$$

где f и $\mathbf{a}$ — любые скаляр и вектор, к произведению $\bar{\mathbf{j}}\cdot\frac{1}{R}$, находим:

$$\operatorname{rot}\frac{\bar{\mathbf{j}}}{R} = \left[\operatorname{grad}\frac{1}{R}\cdot\bar{\mathbf{j}}\right] = \frac{[\bar{\mathbf{j}}\mathbf{R}]}{R^3},$$

и, следовательно,

$$\bar{\mathbf{H}} = \frac{1}{c}\int\frac{[\bar{\mathbf{j}}\mathbf{R}]}{R^3}\,dV \tag{43,7}$$

(радиус-вектор $\mathbf{R}$ направлен из dV в точку наблюдения поля). Это — так называемый *закон Био и Савара*.