§ 44. Магнитный момент

Рассмотрим среднее магнитное поле, создаваемое системой стационарно движущихся зарядов на больших расстояниях от этой системы.

Введем систему координат с началом где-нибудь внутри системы зарядов, аналогично тому, как мы делали в § 40. Обозначим опять радиус-векторы отдельных зарядов посредством $\mathbf{r}_a$, а радиус-вектор точки, в которой мы ищем поле, посредством $\mathbf{R}_0$. Тогда $\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_a$ есть радиус-вектор от заряда e_a к точке наблюдения. Согласно (43,6) имеем для векторного потенциала:

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{c} \sum \overline{\frac{e_a \mathbf{v}_a}{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_a|}}. \tag{44,1}$$

Как и в § 40, разложим это выражение по степеням $\mathbf{r}_a$. С точностью до членов первого порядка (индекс a для краткости опускаем):

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{cR_0} \sum e\bar{\mathbf{v}} - \frac{1}{c} \sum \overline{e\mathbf{v}\left(\mathbf{r}\nabla \frac{1}{R_0}\right)}.$$

В первом члене можно написать:

$$\sum e\bar{\mathbf{v}} = \overline{\frac{d}{dt} \sum e\mathbf{r}}.$$

Но среднее значение производной от меняющейся в конечном интервале величины $\sum e\mathbf{r}$ равно нулю. Таким образом, для $\bar{\mathbf{A}}$ остается выражение

$$\bar{\mathbf{A}} = -\frac{1}{c} \sum \overline{e\mathbf{v}\left(\mathbf{r}\nabla \frac{1}{R_0}\right)} = \frac{1}{cR_0^3} \sum \overline{e\mathbf{v}(\mathbf{r}\mathbf{R}_0)}.$$

Преобразуем его следующим образом. Замечая, что $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$, мы можем написать (помня, что $\mathbf{R}_0$ есть постоянный вектор):

$$\sum e(\mathbf{R}_0\mathbf{r})\mathbf{v} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \sum e\mathbf{r}(\mathbf{r}\mathbf{R}_0) + \frac{1}{2} \sum e[\mathbf{v}(\mathbf{r}\mathbf{R}_0) - \mathbf{r}(\mathbf{v}\mathbf{R}_0)].$$

При подстановке этого выражения в $\bar{\mathbf{A}}$ среднее значение от первого члена (с производной по времени) снова обратится в нуль, и мы получим:

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{2cR_0^3} \sum e\overline{[\mathbf{v}(\mathbf{r}\mathbf{R}_0) - \mathbf{r}(\mathbf{v}\mathbf{R}_0)]}.$$

Введем вектор

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \sum e[\mathbf{r}\mathbf{v}], \tag{44,2}$$

называемый *магнитным моментом* системы. Тогда

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{[\bar{\mathbf{m}}\mathbf{R}_0]}{R_0^3} = \left[\nabla \frac{1}{R_0} \cdot \bar{\mathbf{m}}\right]. \tag{44,3}$$

Зная векторный потенциал, легко найти напряженность магнитного поля. С помощью формулы

$$\operatorname{rot}[\mathbf{ab}] = (\mathbf{b}\nabla)\,\mathbf{a} - (\mathbf{a}\nabla)\,\mathbf{b} + \mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{b} - \mathbf{b}\operatorname{div}\mathbf{a}$$

находим:

$$\bar{\mathbf{H}} = \operatorname{rot}\left[\bar{\mathfrak{m}}\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3}\right] = \bar{\mathfrak{m}}\operatorname{div}\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3} - (\bar{\mathfrak{m}}\nabla)\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3}.$$

Далее, при $\mathbf{R}_0 \neq 0$

$$\operatorname{div}\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3} = \mathbf{R}_0\operatorname{grad}\frac{1}{R_0^3} + \frac{1}{R_0^3}\operatorname{div}\mathbf{R}_0 = 0$$

и

$$(\mathfrak{m}\nabla)\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3} = \frac{1}{R_0^3}(\bar{\mathfrak{m}}\nabla)\,\mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_0\left(\bar{\mathfrak{m}}\nabla\frac{1}{R_0^3}\right) = \frac{\bar{\mathfrak{m}}}{R_0^3} - \frac{3\mathbf{R}_0(\bar{\mathfrak{m}}\mathbf{R}_0)}{R_0^5}.$$

Таким образом,

$$\bar{\mathbf{H}} = \frac{3\mathbf{n}(\bar{\mathfrak{m}}\mathbf{n}) - \bar{\mathfrak{m}}}{R_0^3}, \tag{44,4}$$

где $\mathbf{n}$ — снова единичный вектор в направлении $\mathbf{R}_0$. Мы видим, что магнитное поле выражается через магнитный момент такой же формулой, какой электрическое поле выражается через дипольный момент (см. (40,8)).

Если у всех зарядов системы отношение заряда к массе одинаково, то мы можем написать:

$$\mathfrak{m} = \frac{1}{2c}\sum e\,[\mathbf{rv}] = \frac{e}{2mc}\sum m\,[\mathbf{rv}].$$

Если скорости всех зарядов $v \ll c$, то $m\mathbf{v}$ есть импульс $\mathbf{p}$ заряда, и мы получаем:

$$\mathfrak{m} = \frac{e}{2mc}\sum[\mathbf{rp}] = \frac{e}{2mc}\mathbf{M}, \tag{44,5}$$

где $\mathbf{M} = \sum[\mathbf{rp}]$ есть механический момент импульса системы. Таким образом, в этом случае отношение магнитного момента к механическому постоянно и равно $e/2mc$.

Задача

Определить отношение магнитного и механического моментов для системы из двух зарядов (скорости $v \ll c$).

Решение. Выбирая начало координат в центре инерции обеих частиц, будем иметь $m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 = 0$ и $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}$, где $\mathbf{p}$ — импульс относительного движения. С помощью этих соотношений найдем:

$$\mathfrak{m} = \frac{1}{2c}\left(\frac{e_1}{m_1^2} + \frac{e_2}{m_2^2}\right)\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\mathbf{M}.$$