§ 45. Теорема Лармора

Рассмотрим систему зарядов, находящуюся во внешнем постоянном однородном магнитном поле.

Средняя (по времени) сила, действующая на систему,

$$\bar{\mathbf{F}} = \sum \frac{e}{c} \overline{[\mathbf{vH}]} = \overline{\frac{d}{dt} \sum \frac{e}{c} [\mathbf{rH}]},$$

обращается в нуль как среднее значение производной по времени от всякой величины, меняющейся в конечных пределах. Среднее же значение момента сил

$$\bar{\mathbf{K}} = \sum \frac{e}{c} \overline{[\mathbf{r}[\mathbf{vH}]]}$$

отлично от нуля. Его можно выразить через магнитный момент системы, для чего пишем, раскрывая двойное векторное произведение:

$$\mathbf{K} = \sum \frac{e}{c} \{\mathbf{v}(\mathbf{rH}) - \mathbf{H}(\mathbf{vr})\} = \sum \frac{e}{c} \left\{ \mathbf{v}(\mathbf{rH}) - \frac{1}{2} \mathbf{H} \frac{d}{dt} \mathbf{r}^2 \right\}.$$

При усреднении второй член обращается в нуль, так что

$$\bar{\mathbf{K}} = \sum \frac{e}{c} \overline{\mathbf{v}(\mathbf{rH})} = \frac{1}{2c} \sum e \{\overline{\mathbf{v}(\mathbf{rH})} - \overline{\mathbf{r}(\mathbf{vH})}\}$$

(последнее преобразование аналогично произведенному при выводе (44,3)), или окончательно

$$\bar{\mathbf{K}} = [\bar{\mathbf{m}}\mathbf{H}]. \tag{45,1}$$

Обратим внимание на аналогию с формулой (42,6) электрического случая.

Функция Лагранжа системы зарядов во внешнем постоянном однородном магнитном поле содержит дополнительный (по отношению к функции Лагранжа замкнутой системы) член

$$L_H = \sum \frac{e}{c} \mathbf{Av} = \sum \frac{e}{2c} [\mathbf{Hr}]\,\mathbf{v} = \sum \frac{e}{2c} [\mathbf{rv}]\,\mathbf{H} \tag{45,2}$$

(мы воспользовались выражением (19,4) для векторного потенциала однородного поля). Вводя магнитный момент системы, имеем:

$$L_H = \mathbf{mH}. \tag{45,3}$$

Обратим внимание на аналогию с электрическим полем: в однородном электрическом поле функция Лагранжа системы с равным нулю полным зарядом и дипольным моментом содержит член

$$L_E = \mathbf{dE},$$

являющийся в этом случае потенциальной энергией системы зарядов, взятой с обратным знаком (см. § 42).

Рассмотрим систему зарядов, совершающих финитное движение (со скоростями $v \ll c$) в центрально-симметричном электрическом поле, создаваемом некоторой неподвижной частицей.

Перейдем от неподвижной системы координат к системе, равномерно вращающейся вокруг оси, проходящей через неподвижную частицу. Согласно известной формуле скорость $\mathbf{v}$ частицы в новой системе координат связана с ее же скоростью $\mathbf{v}'$ в старой системе соотношением

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + [\mathbf{\Omega r}],$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор частицы, а $\mathbf{\Omega}$ — угловая скорость вращающейся системы координат. В неподвижной системе функция Лагранжа системы зарядов есть

$$L = \sum \frac{mv'^2}{2} - U,$$

где U — потенциальная энергия зарядов во внешнем электрическом поле вместе с энергией их взаимодействия друг с другом. U является функцией от расстояний зарядов до неподвижной частицы и от их взаимных расстояний; при переходе к вращающейся системе координат она остается, очевидно, неизменной. Поэтому в новой системе функция Лагранжа будет

$$L = \sum \frac{m}{2} (\mathbf{v} + [\mathbf{\Omega r}])^2 - U.$$

Предположим, что у всех частиц отношение e/m зарядов к массам одинаково, и положим

$$\mathbf{\Omega} = \frac{e}{2mc} \mathbf{H}. \tag{45,4}$$

Тогда при достаточно малых H (когда можно пренебречь членами с H^2) функция Лагранжа приобретает вид

$$L = \sum \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2c} \sum e [\mathbf{Hr}] \mathbf{v} - U.$$

Мы видим, что она совпадает с функцией Лагранжа, которой описывалось бы движение рассматриваемых зарядов в неподвижной системе координат при наличии постоянного магнитного поля (ср. (45,2)).

Таким образом, мы приходим к результату, что в нерелятивистском случае поведение системы зарядов с одинаковыми отношениями e/m, совершающих финитное движение в центрально-симметричном электрическом поле и в слабом однородном магнитном поле $\mathbf{H}$, эквивалентно поведению этой же системы зарядов в том же электрическом поле в системе координат, равномерно вращающейся с угловой скоростью (45,4). Это утверждение составляет содержание так называемой *теоремы Лармора*,

а угловая скорость $\Omega = eH/2mc$ называется *ларморовой частотой*.

К этому же вопросу можно подойти с другой точки зрения. При достаточно слабом магнитном поле H ларморова частота мала по сравнению с частотами финитного движения данной системы зарядов, и можно рассматривать относящиеся к этой системе величины, усредненные по временам, малым по сравнению с периодом $2\pi/\Omega$. Эти величины будут медленно (с частотой Ω) меняться со временем.

Рассмотрим изменение среднего механического момента системы $\bar{\mathbf{M}}$. Согласно известному уравнению механики производная $\dot{\bar{\mathbf{M}}}$ равна моменту действующих на систему сил $\bar{\mathbf{K}}$. Поэтому имеем, с помощью формулы (45,1):

$$\frac{d\bar{\mathbf{M}}}{dt} = \bar{\mathbf{K}} = [\bar{\mathfrak{m}}\mathbf{H}].$$

Если отношение e/m для всех частиц в системе одинаково, то механический и магнитный моменты пропорциональны друг другу, и с помощью формул (44,5) и (45,4) находим:

$$\frac{d\bar{\mathbf{M}}}{dt} = -[\mathbf{\Omega}\bar{\mathbf{M}}]. \qquad (45,5)$$

Это уравнение означает, что вектор $\bar{\mathbf{M}}$ (а с ним и магнитный момент $\bar{\mathfrak{m}}$) вращается с угловой скоростью $-\mathbf{\Omega}$ вокруг направления поля, сохраняя при этом свою абсолютную величину и угол, образуемый им с этим направлением (так называемая *ларморова прецессия*).