ГЛАВА VI

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

§ 46. Волновое уравнение

Электромагнитное поле в пустоте определяется уравнениями Максвелла, в которых надо положить $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$. Выпишем их еще раз:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \tag{46,1}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0. \tag{46,2}$$

Эти уравнения могут иметь отличные от нуля решения. Это значит, что электромагнитное поле может существовать даже при отсутствии каких бы то ни было зарядов.

Электромагнитные поля, существующие в пустоте при отсутствии зарядов, называют *электромагнитными волнами*. Мы займемся теперь исследованием свойств таких полей.

Прежде всего отметим, что эти поля обязательно должны быть переменными. Действительно, в противном случае $\partial \mathbf{H}/\partial t = \partial \mathbf{E}/\partial t = 0$, и уравнения (46,1—2) переходят в уравнения (36,1—2) и (43,1—2) постоянного поля, в которых, однако, теперь $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$. Но решения этих уравнений, определенные формулами (36,8) и (43,5), при $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$ обращаются в нуль.

Выведем уравнения, определяющие потенциалы электромагнитных волн.

Как мы уже знаем, в силу неоднозначности потенциалов всегда можно наложить на них некоторое дополнительное условие. На этом основании выберем потенциалы электромагнитных волн так, чтобы скалярный потенциал был равен нулю:

$$\varphi = 0. \tag{46,3}$$

Тогда

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \qquad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \tag{46,4}$$

Подставляя оба эти выражения в первое из уравнений (46,2), находим:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{A} = -\Delta \mathbf{A} + \operatorname{grad}\operatorname{div} \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}. \tag{46,5}$$

Несмотря на то, что мы уже наложили одно дополнительное условие на потенциалы, потенциал **A** все же еще не вполне однозначен. Именно, к нему можно прибавить градиент любой не зависящей от времени функции (не меняя при этом φ). В частности, можно выбрать потенциал электромагнитной волны таким образом, чтобы

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \tag{46,6}$$

Действительно, подставляя **E** из (46,4) в $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$, имеем:

$$\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A} = 0,$$

т. е. $\operatorname{div} \mathbf{A}$ есть функция только от координат. Эту функцию всегда можно обратить в нуль прибавлением к **A** градиента от соответствующей не зависящей от времени функции.

Уравнение (46,5) приобретает теперь вид

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \tag{46,7}$$

Это и есть уравнение, определяющее потенциал электромагнитных волн. Оно называется *уравнением д'Аламбера* или *волновым уравнением*[1]).

Применяя к (46,7) операции rot и $\partial/\partial t$, убедимся в том, что напряженности **E** и **H** удовлетворяют таким же волновым уравнениям.

Повторим вывод волнового уравнения в четырехмерном виде. Для этого напишем вторую пару уравнений Максвелла для поля в отсутствие зарядов в виде

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = 0$$

(уравнение (30,2) с $j^i = 0$). Подставив сюда F^{ik}, выраженные через потенциалы:

$$F^{ik} = \frac{\partial A^k}{\partial x_i} - \frac{\partial A^i}{\partial x_k},$$

получим:

$$\frac{\partial^2 A^k}{\partial x_i \partial x^k} - \frac{\partial^2 A^i}{\partial x_k \partial x^k} = 0. \tag{46,8}$$

Наложим на потенциалы дополнительное условие

$$\frac{\partial A^k}{\partial x^k} = 0 \tag{46,9}$$

---

[1]) Волновое уравнение иногда записывают в виде $\Box \mathbf{A} = 0$, где

$$\Box = -\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x^i} = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

есть так называемый *оператор д'Аламбера*.

(это условие называют лоренцевым, а об удовлетворяющих ему потенциалах говорят как о потенциалах в *лоренцевой калибровке*). Тогда в уравнении (46,8) первый член выпадает и остается

$$\frac{\partial^2 A^i}{\partial x_k \partial x^k} \equiv g^{kl} \frac{\partial^2 A^i}{\partial x^k \partial x^l} = 0. \tag{46,10}$$

Это и есть волновое уравнение, записанное в четырехмерном виде[1]).

В трехмерной форме условие (46,9) имеет вид

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \tag{46,11}$$

Оно является более общим, чем использованные нами выше условия $\varphi = 0$, $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$; потенциалы, удовлетворяющие этим последним, удовлетворяют также и условию (46,11). В отличие от них, однако, условие Лоренца имеет релятивистски инвариантный характер: потенциалы, удовлетворяющие ему в одной системе отсчета, удовлетворяют ему и во всякой другой системе (между тем как условия (46,3), (46,6) нарушаются, вообще говоря, при преобразовании системы отсчета).

§ 47. Плоские волны

Рассмотрим частный случай электромагнитных волн, когда поле зависит только от одной координаты, скажем x (и от времени). Такие волны называются *плоскими*. В этом случае уравнения поля принимают вид

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \tag{47,1}$$

где под f подразумевается любая компонента векторов **E** или **H**.

Для решения этого уравнения перепишем его в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right) f = 0$$

и введем новые переменные

$$\xi = t - \frac{x}{c}, \quad \eta = t + \frac{x}{c},$$

так что

$$t = \frac{1}{2}(\eta + \xi), \quad x = \frac{c}{2}(\eta - \xi).$$

---

[1]) Следует отметить, что условие (46,9) не определяет еще выбор потенциалов вполне однозначным образом. Именно, к **A** можно прибавить $\operatorname{grad} f$, а из φ при этом вычесть $\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}$, причем, однако, функция f не произвольна, а должна удовлетворять, как легко убедиться, волновому уравнению $\Box f = 0$.