(это условие называют лоренцевым, а об удовлетворяющих ему потенциалах говорят как о потенциалах в *лоренцевой калибровке*). Тогда в уравнении (46,8) первый член выпадает и остается

$$\frac{\partial^2 A^i}{\partial x_k \partial x^k} \equiv g^{kl} \frac{\partial^2 A^i}{\partial x^k \partial x^l} = 0. \tag{46,10}$$

Это и есть волновое уравнение, записанное в четырехмерном виде[1]).

В трехмерной форме условие (46,9) имеет вид

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \tag{46,11}$$

Оно является более общим, чем использованные нами выше условия $\varphi = 0$, $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$; потенциалы, удовлетворяющие этим последним, удовлетворяют также и условию (46,11). В отличие от них, однако, условие Лоренца имеет релятивистски инвариантный характер: потенциалы, удовлетворяющие ему в одной системе отсчета, удовлетворяют ему и во всякой другой системе (между тем как условия (46,3), (46,6) нарушаются, вообще говоря, при преобразовании системы отсчета).

§ 47. Плоские волны

Рассмотрим частный случай электромагнитных волн, когда поле зависит только от одной координаты, скажем x (и от времени). Такие волны называются *плоскими*. В этом случае уравнения поля принимают вид

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \tag{47,1}$$

где под f подразумевается любая компонента векторов **E** или **H**.

Для решения этого уравнения перепишем его в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right) f = 0$$

и введем новые переменные

$$\xi = t - \frac{x}{c}, \quad \eta = t + \frac{x}{c},$$

так что

$$t = \frac{1}{2}(\eta + \xi), \quad x = \frac{c}{2}(\eta - \xi).$$

---

[1]) Следует отметить, что условие (46,9) не определяет еще выбор потенциалов вполне однозначным образом. Именно, к **A** можно прибавить $\operatorname{grad} f$, а из φ при этом вычесть $\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}$, причем, однако, функция f не произвольна, а должна удовлетворять, как легко убедиться, волновому уравнению $\Box f = 0$.

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial\xi}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}-c\frac{\partial}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial}{\partial\eta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+c\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

и уравнение для f:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\,\partial\eta}=0.$$

Очевидно, что его решение имеет вид

$$f=f_1(\xi)+f_2(\eta),$$

где f_1 и f_2 — произвольные функции. Таким образом,

$$f=f_1\left(t-\frac{x}{c}\right)+f_2\left(t+\frac{x}{c}\right). \tag{47,2}$$

Пусть, например, $f_2=0$, так что $f=f_1(t-x/c)$. Выясним смысл этого решения. В каждой плоскости $x=\text{const}$ поле меняется со временем; в каждый данный момент поле различно для разных x. Очевидно, что поле имеет одинаковое значение для координат x и моментов времени t, удовлетворяющих соотношениям $t-x/c=\text{const}$, т. е.

$$x=\text{const}+ct.$$

Это значит, что если в некоторый момент $t=0$ в некоторой точке x пространства поле имело определенное значение, то через промежуток времени t то же самое значение поле имеет на расстоянии ct вдоль оси x от первоначального места. Мы можем сказать, что все значения электромагнитного поля распространяются в пространстве вдоль оси x со скоростью, равной скорости света c.

Таким образом, $f_1(t-x/c)$ представляет собой плоскую волну, бегущую в положительном направлении оси x. Очевидно, что $f_2(t+x/c)$ представляет собой волну, бегущую в противоположном, отрицательном, направлении оси x.

В § 46 было показано, что потенциалы электромагнитной волны можно выбрать так, чтобы $\varphi=0$, причем $\operatorname{div}\mathbf{A}=0$. Выберем потенциалы рассматриваемой теперь плоской волны именно таким образом. Условие $\operatorname{div}\mathbf{A}=0$ дает в этом случае

$$\frac{\partial A_x}{\partial x}=0,$$

поскольку все величины не зависят от y и z. Согласно (47,1) будем иметь тогда и $\partial^2 A_x/\partial t^2=0$, т. е. $\partial A_x/\partial t=\text{const}$. Но производная $\partial\mathbf{A}/\partial t$ определяет электрическое поле, и мы видим, что отличная от нуля компонента A_x означала бы в рассматриваемом случае наличие постоянного продольного электрического поля. Поскольку такое поле не имеет отношения к электромагнитной волне, то можно положить $A_x=0$.

Таким образом, векторный потенциал плоской волны может быть всегда выбран перпендикулярным к оси x, т. е. к направлению распространения этой волны.

Рассмотрим плоскую волну, бегущую в положительном направлении оси x; в такой волне все величины, в частности и $\mathbf{A}$, являются функциями только от $t-x/c$. Из формул

$$\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t},\quad \mathbf{H}=\operatorname{rot}\mathbf{A}$$

мы находим поэтому:

$$\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\mathbf{A}',\quad \mathbf{H}=[\nabla\mathbf{A}]=\left[\nabla\left(t-\frac{x}{c}\right)\cdot\mathbf{A}'\right]=-\frac{1}{c}[\mathbf{nA}'],\qquad (47,3)$$

где штрих обозначает дифференцирование по $t-x/c$, а $\mathbf{n}$ — единичный вектор вдоль направления распространения волны. Подставляя первое равенство во второе, находим:

$$\mathbf{H}=[\mathbf{nE}].\qquad (47,4)$$

Мы видим, что электрическое и магнитное поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ плоской волны направлены перпендикулярно к направлению распространения волны. На этом основании электромагнитные волны называют *поперечными*. Из (47,4) видно, далее, что электрическое и магнитное поля плоской волны перпендикулярны друг к другу и одинаковы по абсолютной величине.

Поток энергии в плоской волне

$$\mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}]=\frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}[\mathbf{nE}]],$$

и поскольку $\mathbf{En}=0$, то

$$\mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}E^2\mathbf{n}=\frac{c}{4\pi}H^2\mathbf{n}.$$

Таким образом, поток энергии направлен вдоль направления распространения волны. Поскольку $W=\frac{1}{8\pi}(E^2+H^2)=\frac{E^2}{4\pi}$ есть плотность энергии волны, то можно написать:

$$\mathbf{S}=cW\mathbf{n},\qquad (47,5)$$

в согласии с тем, что поле распространяется со скоростью света.

Импульс единицы объема электромагнитного поля есть $\mathbf{S}/c^2$. Для плоской волны это дает $(W/c)\mathbf{n}$. Обратим внимание на то, что соотношение между энергией W и импульсом W/c электромагнитной волны оказывается таким же, как для частиц, движущихся со скоростью света (см. (9,9)).

Поток импульса поля дается максвелловским тензором напряжений $\sigma_{\alpha\beta}$ (33,3). Выбирая по-прежнему направление рас-

пространения волны в качестве оси x, найдем, что единственная отличная от нуля компонента $T^{\alpha\beta}$ есть

$$T^{xx} = -\sigma_{xx} = W. \tag{47,6}$$

Как и следовало, поток импульса направлен по направлению распространения волны и равен по величине плотности энергии.

Найдем закон преобразования плотности энергии плоской электромагнитной волны при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Для этого в формулу

$$W = \frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}}\left(W' + 2\frac{V}{c^2}S'_x - \frac{V^2}{c^2}\sigma'_{xx}\right)$$

(см. задачу к § 33) надо подставить

$$S'_x = cW'\cos\alpha', \quad \sigma'_{xx} = -W'\cos^2\alpha',$$

где α' — угол (в системе K') между осью x' (вдоль которой направлена скорость $\mathbf{V}$) и направлением распространения волны. В результате находим:

$$W = W'\frac{\left(1+\frac{V}{c}\cos\alpha'\right)^2}{1-\frac{V^2}{c^2}}. \tag{47,7}$$

Поскольку $W = E^2/4\pi = H^2/4\pi$, то абсолютные величины напряженностей поля волны преобразуются как $\sqrt{W}$.

Задачи

1. Определить силу, действующую на стенку, от которой отражается (с коэффициентом отражения R) падающая на нее плоская электромагнитная волна.

Решение. Сила $\mathbf{f}$, действующая на единицу площади стенки, дается потоком импульса через эту площадь, т. е. есть вектор с составляющими

$$f_\alpha = -\sigma_{\alpha\beta}N_\beta - \sigma'_{\alpha\beta}N_\beta,$$

где $\mathbf{N}$ — вектор нормали к поверхности стенки, а $\sigma_{\alpha\beta}$ и $\sigma'_{\alpha\beta}$ — компоненты тензоров напряжений падающей и отраженной волн. Учитывая (47,6), получим:

$$\mathbf{f} = W\mathbf{n}(\mathbf{Nn}) + W'\mathbf{n}'(\mathbf{Nn}').$$

По определению коэффициента отражения имеем: $W' = RW$. Введя также угол падения θ (и равный ему же угол отражения) и переходя к компонентам, найдем нормальную силу (*световое давление*)

$$f_N = W(1+R)\cos^2\theta$$

и тангенциальную силу

$$f_t = W(1-R)\sin\theta\cos\theta.$$

2. Методом Гамильтона — Якоби определить движение заряда в поле плоской электромагнитной волны.

Решение. Уравнение Гамильтона — Якоби, записанное в четырехмерной форме:

$$g^{ik}\left(\frac{\partial S}{\partial x^i}+\frac{e}{c}A_i\right)\left(\frac{\partial S}{\partial x^k}+\frac{e}{c}A_k\right)=m^2c^2\,. \tag{1}$$

Тот факт, что поле представляет собой плоскую волну, означает, что A^i являются функциями одной независимой переменной, которую можно представить в виде $\xi = k_i x^i$, где k^i — постоянный 4-вектор с равным нулю квадратом, $k_i k^i = 0$ (ср. следующий параграф). Потенциалы подчиним лоренцеву условию

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^i}=\frac{dA^i}{d\xi}k_i=0;$$

для переменного поля волны это условие эквивалентно равенству $A^i k_i = 0$.

Ищем решение уравнения (1) в виде

$$S=-f_i x^i+F(\xi),$$

где $f^i = (f^0, \mathbf{f})$ — постоянный вектор, удовлетворяющий условию $f_i f^i = m^2c^2$ ($S = -f_i x^i$ — решение уравнения Гамильтона — Якоби для свободной частицы с 4-импульсом $p^i = f^i$). Подстановка в (1) приводит к уравнению

$$\frac{e^2}{c^2}A_iA^i-2\gamma\frac{dF}{d\xi}-\frac{2e}{c}f_iA^i=0,$$

где постоянная $\gamma = k_i f^i$. Определив отсюда F, получим:

$$S=-f_ix^i-\frac{e}{c\gamma}\int f_iA^i\,d\xi+\frac{e^2}{2\gamma c^2}\int A_iA^i\,d\xi. \tag{2}$$

Переходя к трехмерным обозначениям с фиксированной системой отсчета, выберем направление распространения волны в качестве оси x. Тогда $\xi = ct - x$, а постоянная $\gamma = f^0 - f^1$. Обозначив двухмерный вектор f_y, f_z через $\boldsymbol{\varkappa}$, получим из условия $f_if^i = (f^0)^2 - (f^1)^2 - \varkappa^2 = m^2c^2$:

$$f^0+f^1=\frac{m^2c^2+\varkappa^2}{\gamma}.$$

Выберем потенциалы в калибровке, в которой $\varphi = 0$, а $\mathbf{A}(\xi)$ лежит в плоскости yz. После этого выражение (2) примет вид

$$S=\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{r}-\frac{\gamma}{2}(ct+x)-\frac{m^2c^2+\varkappa^2}{2\gamma}\xi+\frac{e}{c\gamma}\int\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{A}\,d\xi-\frac{e^2}{2\gamma c^2}\int\mathbf{A}^2\,d\xi.$$

Согласно общим правилам (см. I § 47) для определения движения надо приравнять производные $\partial S/\partial\boldsymbol{\varkappa}$, $\partial S/\partial\gamma$ некоторым новым постоянным, которые можно обратить в нуль соответствующим выбором начала координат и начала отсчета времени. Таким образом получим параметрические формулы (ξ — параметр):

$$y=\frac{1}{\gamma}\varkappa_y\xi-\frac{e}{c\gamma}\int A_y\,d\xi,\quad z=\frac{1}{\gamma}\varkappa_z\xi-\frac{e}{c\gamma}\int A_z\,d\xi,$$

$$x=\frac{1}{2}\left(\frac{m^2c^2+\varkappa^2}{\gamma^2}-1\right)\xi-\frac{e}{c\gamma^2}\int\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{A}\,d\xi+\frac{e^2}{2\gamma^2c^2}\int\mathbf{A}^2\,d\xi,\quad ct=\xi+x.$$

Обобщенный импульс $\mathbf{P}=\mathbf{p}+\frac{e}{c}\mathbf{A}$ и энергия $\mathscr{E}$ определяются дифференцированием действия по координатам и времени; это дает:

$$p_y=\varkappa_y-\frac{e}{c}A_y,\qquad p_z=\varkappa_z-\frac{e}{c}A_z,$$

$$p_x=-\frac{\gamma}{2}+\frac{m^2c^2+\varkappa^2}{2\gamma}-\frac{e}{c\gamma}\varkappa\mathbf{A}+\frac{e^2}{2\gamma c^2}\mathbf{A}^2;$$

$$\mathscr{E}=(\gamma+p_x)c.$$

Если усреднить эти величины по времени, то члены с первой степенью периодической функции $\mathbf{A}(\xi)$ обратятся в нуль. Пусть система отсчета выбрана таким образом, что в ней частица в среднем покоится, т. е. ее средний импульс равен нулю. При этом будет

$$\varkappa=0,\quad \gamma^2=m^2c^2+\frac{e^2}{c^2}\overline{\mathbf{A}^2}.$$

Тогда окончательные формулы для определения движения примут вид

$$x=\frac{e^2}{2\gamma^2c^2}\int(\mathbf{A}^2-\overline{\mathbf{A}^2})\,d\xi,\qquad y=-\frac{e}{c\gamma}\int A_y\,d\xi,\quad z=-\frac{e}{c\gamma}\int A_z\,d\xi,$$

$$ct=\xi+\frac{e^2}{2\gamma^2c^2}\int(\mathbf{A}^2-\overline{\mathbf{A}^2})\,d\xi; \tag{3}$$

$$p_x=\frac{e^2}{2\gamma c^2}(\mathbf{A}^2-\overline{\mathbf{A}^2}),\qquad p_y=-\frac{e}{c}A_y,\qquad p_z=-\frac{e}{c}A_z,$$

$$\mathscr{E}=c\gamma+\frac{e^2}{2\gamma c}(\mathbf{A}^2-\overline{\mathbf{A}^2}). \tag{4}$$

§ 48. Монохроматическая плоская волна

Важный частный случай электромагнитных волн представляют волны, в которых поле является простой периодической функцией времени. Такая волна называется *монохроматической*. Все величины (потенциалы, компоненты полей) в монохроматической волне зависят от времени посредством множителя вида $\cos(\omega t+\alpha)$, где ω — *циклическая частота* (или просто *частота*) волны.

В волновом уравнении вторая производная от поля по времени равна теперь $\partial^2 f/\partial t^2=-\omega^2 f$, так что распределение поля по пространству определяется в монохроматической волне уравнением

$$\Delta f+\frac{\omega^2}{c^2}f=0. \tag{48,1}$$

В плоской волне (распространяющейся вдоль оси x) поле является функцией только от $t-x/c$. Поэтому если плоская волна монохроматична, то ее поле является простой периодической функцией от $t-x/c$. Векторный потенциал такой волны