

Обобщенный импульс $P = p + \frac{e}{c} A$ и энергия \mathcal{E} определяются дифференцированием действия по координатам и времени; это дает:

$$\begin{aligned} p_y &= \kappa_y - \frac{e}{c} A_y, & p_z &= \kappa_z - \frac{e}{c} A_z, \\ p_x &= -\frac{\gamma}{2} + \frac{m^2 c^2 + \kappa^2}{2\gamma} - \frac{e}{c\gamma} \kappa A + \frac{e^2}{2\gamma c^2} A^2, \\ \mathcal{E} &= (\gamma + p_x) c. \end{aligned}$$

Если усреднить эти величины по времени, то члены с первой степенью периодической функции $A(\xi)$ обратятся в нуль. Пусть система отсчета выбрана таким образом, что в ней частица в среднем поконится, т. е. ее средний импульс равен нулю. При этом будет

$$\kappa = 0, \quad \gamma^2 = m^2 c^2 + \frac{e^2}{c^2} \bar{A}^2.$$

Тогда окончательные формулы для определения движения примут вид

$$\begin{aligned} x &= \frac{e^2}{2\gamma^2 c^2} \int (A^2 - \bar{A}^2) d\xi, & y &= -\frac{e}{c\gamma} \int A_y d\xi, & z &= -\frac{e}{c\gamma} \int A_z d\xi, \\ ct &= \xi + \frac{e^2}{2\gamma^2 c^2} \int (A^2 - \bar{A}^2) d\xi; \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{e^2}{2\gamma c^2} (A^2 - \bar{A}^2), & p_y &= -\frac{e}{c} A_y, & p_z &= -\frac{e}{c} A_z, \\ \mathcal{E} &= c\gamma + \frac{e^2}{2\gamma c} (A^2 - \bar{A}^2). \end{aligned} \tag{4}$$

§ 48. Монокроматическая плоская волна

Важный частный случай электромагнитных волн представляют волны, в которых поле является простой периодической функцией времени. Такая волна называется *монокроматической*. Все величины (потенциалы, компоненты полей) в монокроматической волне зависят от времени посредством множителя вида $\cos(\omega t + \alpha)$, где ω — *циклическая частота* (или просто *частота*) волны.

В волновом уравнении вторая производная от поля по времени равна теперь $\partial^2 f / \partial t^2 = -\omega^2 f$, так что распределение поля по пространству определяется в монокроматической волне уравнением

$$\Delta f + \frac{\omega^2}{c^2} f = 0. \tag{48, I}$$

В плоской волне (распространяющейся вдоль оси x) поле является функцией только от $t - x/c$. Поэтому если плоская волна монокроматична, то ее поле является простой периодической функцией от $t - x/c$. Векторный потенциал такой волны

удобнее всего написать в виде вещественной части комплексного выражения:

$$\mathbf{A} = \operatorname{Re} \{ \mathbf{A}_0 e^{-i\omega(t-x/c)} \}. \quad (48.2)$$

Здесь \mathbf{A}_0 — некоторый постоянный комплексный вектор. Очевидно, что и напряженности \mathbf{E} и \mathbf{H} в такой волне будут иметь аналогичный вид с той же частотой ω . Величина

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \quad (48.3)$$

называется *длиной волны*; это есть период изменения поля с координатой x в заданный момент времени t .

Вектор

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n} \quad (48.4)$$

(где \mathbf{n} — единичный вектор в направлении распространения волны) называется *волновым вектором*. С его помощью можно представить (48.2) в виде

$$\mathbf{A} = \operatorname{Re} \{ \mathbf{A}_0 e^{i(kr-\omega t)} \}, \quad (48.5)$$

не зависящем от выбора осей координат. Величину, стоящую с множителем i в показателе, называют *фазой* волны.

До тех пор, пока мы производим над величинами лишь линейные операции, можно опускать знак взятия вещественной части и оперировать с комплексными величинами как таковыми¹⁾. Так, подставив

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 e^{i(kr-\omega t)}$$

в (47.3), получим связь между напряженностями и векторным потенциалом плоской монохроматической волны в виде

$$\mathbf{E} = ik\mathbf{A}, \quad \mathbf{H} = i[\mathbf{k}\mathbf{A}]. \quad (48.6)$$

¹⁾ Если какие-либо две величины $\mathbf{A}(t)$ и $\mathbf{B}(t)$ пишутся в комплексном виде:

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}_0 e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{B}(t) = \mathbf{B}_0 e^{-i\omega t},$$

то при образовании их произведения надо, разумеется, сначала отдельить вещественную часть. Но если, как это часто бывает, нас интересует лишь среднее (по времени) значение этого произведения, то его можно вычислить как

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \mathbf{AB}^* \}.$$

Действительно, имеем:

$$\operatorname{Re} \mathbf{A} \operatorname{Re} \mathbf{B} = \frac{1}{4} (\mathbf{A}_0 e^{-i\omega t} + \mathbf{A}_0^* e^{i\omega t}) (\mathbf{B}_0 e^{-i\omega t} + \mathbf{B}_0^* e^{i\omega t}).$$

При усреднении члены, содержащие множители $e^{\pm 2i\omega t}$, обращаются в нуль, так что остается

$$\overline{\operatorname{Re} \mathbf{A} \operatorname{Re} \mathbf{B}} = \frac{1}{4} (\mathbf{A}_0 \mathbf{B}_0^* + \mathbf{A}_0^* \mathbf{B}_0) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\mathbf{AB}^*).$$

Рассмотрим подробнее вопрос о направлении поля монохроматической волны. Будем для определенности говорить об электрическом поле

$$\mathbf{E} = \operatorname{Re} \{ \mathbf{E}_0 e^{i(kr - \omega t)} \}$$

(все сказанное ниже относится, разумеется, в той же мере и к магнитному полю). \mathbf{E}_0 есть некоторый комплексный вектор. Его квадрат \mathbf{E}_0^2 есть некоторое, вообще говоря, тоже комплексное число. Если аргумент этого числа есть $-2a$ (т. е. $\mathbf{E}_0^2 = |\mathbf{E}_0|^2 e^{-2ia}$), то вектор \mathbf{b} , определенный согласно

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{b} e^{-ia}, \quad (48,7)$$

будет иметь вещественный квадрат $\mathbf{b}^2 = |\mathbf{E}_0|^2$. С таким определением напишем:

$$\mathbf{E} = \operatorname{Re} \{ \mathbf{b} e^{i(kr - \omega t + a)} \}. \quad (48,8)$$

Представим \mathbf{b} в виде

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + i\mathbf{b}_2,$$

где \mathbf{b}_1 и \mathbf{b}_2 — два вещественных вектора. Поскольку квадрат $\mathbf{b}^2 = \mathbf{b}_1^2 - \mathbf{b}_2^2 + 2i\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2$ должен быть вещественной величиной, то $\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2 = 0$, т. е. векторы \mathbf{b}_1 и \mathbf{b}_2 взаимно перпендикулярны. Выберем направление \mathbf{b}_1 в качестве оси y (ось x — по направлению распространения волны). Тогда из (48,8) имеем:

$$E_y = b_1 \cos(\omega t - kr + a), \quad E_z = \pm b_2 \sin(\omega t - kr + a), \quad (48,9)$$

где знак плюс или минус имеет место в зависимости от того, направлен вектор \mathbf{b}_2 в положительном или отрицательном направлении оси z . Из (48,9) следует, что

$$\frac{E_y^2}{b_1^2} + \frac{E_z^2}{b_2^2} = 1. \quad (48,10)$$

Мы видим, таким образом, что в каждой точке пространства вектор электрического поля вращается в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения волны, причем его конец описывает эллипс (48,10). Такая волна называется *эллиптически поляризованной*. Вращение происходит в направлении по или против направления винта, ввинчиваемого вдоль оси x , соответственно при знаке плюс или минус в (48,9).

Если $b_1 = b_2$, то эллипс (48,10) превращается в круг, т. е. вектор \mathbf{E} вращается, оставаясь постоянным по величине. В этом случае говорят, что *волна поляризована по кругу*. Выбор направлений осей y и z при этом становится, очевидно, произвольным. Отметим, что в такой волне отношение y - и z -составляющих комплексной амплитуды \mathbf{E}_0 равно

$$\frac{E_{0z}}{E_{0y}} = \pm i \quad (48,11)$$

соответственно для вращения по и против направления винта (*правая* и *левая* поляризации)¹⁾.

Наконец, если b_1 или b_2 равно нулю, то поле волны направлено везде и всегда параллельно (или антипараллельно) одному и тому же направлению. Волну называют в этом случае *линейно поляризованной* или *поляризованной* в плоскости. Эллиптически поляризованный волну можно рассматривать, очевидно, как наложение двух линейно поляризованных волн.

Вернемся к определению волнового вектора и введем четырехмерный волновой вектор

$$k^i = \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k} \right). \quad (48,12)$$

Тот факт, что эти величины действительно составляют 4-вектор, очевиден хотя бы из того, что при умножении на 4-вектор x^i он дает скаляр — фазу волны:

$$k_i x^i = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}. \quad (48,13)$$

Из определений (48,4) и (48,12) видно, что квадрат волнового 4-вектора равен нулю:

$$k^i k_i = 0. \quad (48,14)$$

Это соотношение следует также и непосредственно из того, что выражение

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \exp(-ik_i x^i)$$

должно быть решением волнового уравнения (46,10).

Как у всякой плоской волны, в монохроматической волне, распространяющейся вдоль оси x , отличны от нуля лишь следующие компоненты тензора энергии-импульса (см. § 47):

$$T^{00} = T^{01} = T^{11} = W.$$

С помощью волнового 4-вектора эти равенства можно записать в тензорном виде как

$$T^{ik} = \frac{W c^2}{\omega^2} k^i k^k. \quad (48,15)$$

Наконец, используя закон преобразования волнового 4-вектора, легко рассмотреть так называемый *эффект Доплера* — изменение частоты волны ω , испускаемой источником, движущимся по отношению к наблюдателю, по сравнению с «собственной» частотой ω_0 того же источника в системе отсчета (K_0), в которой он поконится.

¹⁾ Подразумевается, что оси x , y , z образуют, как всегда, правовинтовую систему.

Пусть V — скорость источника, т. е. скорость системы отсчета K_0 относительно K . Согласно общим формулам преобразования 4-векторов имеем:

$$k^{(0)0} = \frac{k^0 - \frac{V}{c} k^1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

(скорость системы K относительно K_0 есть $-V$). Подставив сюда $k^0 = \omega/c$, $k^1 = k \cos \alpha = \frac{\omega}{c} \cos \alpha$, где α — угол (в системе K) между направлением испускания волны и направлением движения источника, и выражая ω через ω_0 , получим:

$$\omega = \omega_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c} \cos \alpha}. \quad (48,16)$$

Это и есть искомая формула. При $V \ll c$ она дает, если угол α не слишком близок к $\pi/2$:

$$\omega \approx \omega_0 \left(1 + \frac{V}{c} \cos \alpha \right). \quad (48,17)$$

При $\alpha = \pi/2$ имеем:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{V^2}{2c^2} \right); \quad (48,18)$$

в этом случае относительное изменение частоты пропорционально квадрату отношения V/c .

Задачи

1. Определить направление и величину осей эллипса поляризации по комплексной амплитуде E_0 .

Решение. Задача заключается в определении вектора $b = b_1 + i b_2$ с вещественным квадратом. Имеем из (48,7):

$$E_0 E_0^* = b_1^2 + b_2^2, \quad [E_0 E_0^*] = -2i [b_1 b_2], \quad (1)$$

или

$$b_1^2 + b_2^2 = A^2 + B^2, \quad b_1 b_2 = AB \sin \delta,$$

где введены обозначения

$$|E_{0y}| = A, \quad |E_{0z}| = B, \quad \frac{E_{0z}}{B} = \frac{E_{0y}}{A} e^{i\delta}$$

для абсолютных значений E_{0y} и E_{0z} и разности фаз (δ) между ними. Отсюда

$$2b_{1,2} = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \sin \delta} \pm \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \sin \delta}, \quad (2)$$

чем и определяются величины полуосей эллипса поляризации.

Для определения их направления (относительно произвольных исходных осей y, z) исходим из равенства

$$\operatorname{Re} \{(E_0 b_1)(E_0^* b_2)\} = 0,$$

в котором легко убедиться, подставив $\mathbf{E}_0 = (\mathbf{b}_1 + i\mathbf{b}_2) e^{-ia}$. Раскрывая это равенство в координатах y, z , получим для угла θ между направлением \mathbf{b}_1 и осью y :

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2AB \cos \delta}{A^2 - B^2}. \quad (3)$$

Направление вращения поля определяется знаком x -компоненты вектора $[\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2]$. Написав из (1)

$$2i [\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2]_x = E_{0z} E_{0y}^* - E_{0z}^* E_{0y} = |E_{0y}|^2 \left\{ \left(\frac{E_{0z}}{E_{0y}} \right) - \left(\frac{E_{0z}}{E_{0y}} \right)^* \right\},$$

мы видим, что направление вектора $[\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2]$ (по или против положительного направления оси x), а тем самым и знак вращения (по или против направления винта, винчивающегося вдоль оси x) дается знаком мнимой части отношения E_{0z}/E_{0y} (плюс в первом и минус во втором случае). Это правило обобщает правило (48,11) при круговой поляризации.

2. Определить движение заряда в поле плоской монохроматической линейно поляризованной волны.

Решение. Выбирая направление поля \mathbf{E} в волне в качестве оси y , пишем:

$$E_y = E = E_0 \cos \omega \xi, \quad A_y = A = -\frac{cE_0}{\omega} \sin \omega \xi$$

($\xi = t - x/c$). По формулам (3—4) задачи 2 § 47 находим (в системе отсчета, в которой частица в среднем покоятся) следующее параметрическое (параметр $\eta = \omega \xi$) представление движения:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{e^2 E_0^2 c}{8\gamma^2 \omega^3} \sin 2\eta, & y &= -\frac{eE_0 c}{\gamma \omega^2} \cos \eta, & z &= 0; \\ t &= \frac{\eta}{\omega} - \frac{e^2 E_0^2}{8\gamma^2 \omega^3} \sin 2\eta, & \gamma^2 &= m^2 c^2 + \frac{e^2 E_0^2}{2\omega^2}; \\ p_x &= -\frac{e^2 E_0^2}{4\gamma \omega^2} \cos 2\eta, & p_y &= \frac{eE_0}{\omega} \sin \eta, & p_z &= 0. \end{aligned}$$

Заряд движется в плоскости xy по симметричной 8-образной кривой с продольной осью вдоль оси y . Периоду движения отвечает изменение параметра η от 0 до 2π .

3. Определить движение заряда в поле поляризованной по кругу волны.

Решение. Для поля в волне имеем:

$$\begin{aligned} E_y &= E_0 \cos \omega \xi, & E_z &= E_0 \sin \omega \xi, \\ A_y &= -\frac{cE_0}{\omega} \sin \omega \xi, & A_z &= \frac{cE_0}{\omega} \cos \omega \xi. \end{aligned}$$

Движение определяется формулами:

$$\begin{aligned} x &= 0, & y &= -\frac{ecE_0}{\gamma \omega^2} \cos \omega t, & z &= -\frac{ecE_0}{\gamma \omega^2} \sin \omega t, \\ p_x &= 0, & p_y &= \frac{eE_0}{\omega} \sin \omega t, & p_z &= -\frac{eE_0}{\omega} \cos \omega t, \\ \gamma^2 &= m^2 c^2 + \frac{e^2 E_0^2}{\omega^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, заряд движется в плоскости yz по окружности радиуса eE_0/ω^2 с постоянным по величине $p = eE_0/\omega$ импульсом; направление импульса \mathbf{p} в каждый момент противоположно направлению магнитного поля \mathbf{H} волны.

§ 49. Спектральное разложение

Всякую волну можно подвергнуть так называемому спектральному разложению, т. е. представить в виде наложения монохроматических волн с различными частотами. Эти разложения имеют различный характер в зависимости от характера зависимости поля от времени.

К одной категории относятся случаи, когда разложение содержит частоты, образующие дискретный ряд значений. Простейший случай такого рода возникает при разложении чисто периодического (хотя и не монохроматического) поля. Это есть разложение в обычный ряд Фурье; оно содержит частоты, являющиеся целыми кратными «основной» частоты $\omega_0 = 2\pi/T$, где T — период поля. Напишем его в виде

$$\hat{f} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-i\omega_0 n t} \quad (49,1)$$

(\hat{f} — какая-либо из величин, описывающих поле). Величины f_n определяются по самой функции \hat{f} интегралами

$$f_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \hat{f}(t) e^{i n \omega_0 t} dt. \quad (49,2)$$

Ввиду вещественности функции $\hat{f}(t)$ очевидно, что

$$f_{-n} = f_n^*. \quad (49,3)$$

В более сложных случаях в разложении могут присутствовать частоты, являющиеся целыми кратными (и их суммами) нескольких различных, несоизмеримых друг с другом основных частот.

При возведении суммы (49,1) в квадрат и усреднении по времени произведения членов с различными частотами обращаются в нуль ввиду наличия в них осциллирующих множителей. Останутся лишь члены вида $f_n f_{-n} = |f_n|^2$. Таким образом, средний квадрат поля (средняя интенсивность волны) представится в виде суммы интенсивностей монохроматических компонент:

$$\bar{f}^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2 \quad (49,4)$$

(подразумевается, что среднее по периоду значение самой функции $\hat{f}(t)$ равно нулю, так что $f_0 = \bar{f} = 0$).