Таким образом, заряд движется в плоскости yz по окружности радиуса $ecE_0/\gamma\omega^2$ с постоянным по величине $p = eE_0/\omega$ импульсом; направление импульса $\mathbf{p}$ в каждый момент противоположно направлению магнитного поля $\mathbf{H}$ волны.

§ 49. Спектральное разложение

Всякую волну можно подвергнуть так называемому спектральному разложению, т. е. представить в виде наложения монохроматических волн с различными частотами. Эти разложения имеют различный характер в зависимости от характера зависимости поля от времени.

К одной категории относятся случаи, когда разложение содержит частоты, образующие дискретный ряд значений. Простейший случай такого рода возникает при разложении чисто периодического (хотя и не монохроматического) поля. Это есть разложение в обычный ряд Фурье; оно содержит частоты, являющиеся целыми кратными «основной» частоты $\omega_0 = 2\pi/T$, где T — период поля. Напишем его в виде

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-i\omega_0 nt} \tag{49,1}$$

(f — какая-либо из величин, описывающих поле). Величины f_n определяются по самой функции f интегралами

$$f_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{in\omega_0 t}\, dt. \tag{49,2}$$

Ввиду вещественности функции $f(t)$ очевидно, что

$$f_{-n} = f_n^*. \tag{49,3}$$

В более сложных случаях в разложении могут присутствовать частоты, являющиеся целыми кратными (и их суммами) нескольких различных, несоизмеримых друг с другом основных частот.

При возведении суммы (49,1) в квадрат и усреднении по времени произведения членов с различными частотами обращаются в нуль ввиду наличия в них осциллирующих множителей. Останутся лишь члены вида $f_n f_{-n} = |f_n|^2$. Таким образом, средний квадрат поля (средняя интенсивность волны) представится в виде суммы интенсивностей монохроматических компонент:

$$\overline{f^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2 \tag{49,4}$$

(подразумевается, что среднее по периоду значение самой функции $f(t)$ равно нулю, так что $f_0 = \overline{f} = 0$).

К другой категории относятся поля, разлагающиеся в интеграл Фурье, содержащий непрерывный ряд различных частот. Для этого функции $f(t)$ должны удовлетворять определенным условиям; обычно речь идет о функциях, обращающихся в нуль при $t=\pm\infty$. Такое разложение имеет вид

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_\omega e^{-i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi}, \tag{49,5}$$

причем компоненты Фурье определяются по самой функции $f(t)$ интегралами

$$f_\omega=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}\,dt. \tag{49,6}$$

При этом аналогично (49,3)

$$f_{-\omega}=f_\omega^*. \tag{49,7}$$

Выразим полную интенсивность волны, т. е. интеграл от f^2 по всему времени, через интенсивности компонент Фурье. С помощью (49,5—6) имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{f\int_{-\infty}^{\infty} f_\omega e^{-i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi}\right\}dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{f_\omega\int_{-\infty}^{\infty} fe^{-i\omega t}\,dt\right\}\frac{d\omega}{2\pi}=\int_{-\infty}^{\infty} f_\omega f_{-\omega}\frac{d\omega}{2\pi},$$

или, учитывая (49,7),

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}|f_\omega|^2\frac{d\omega}{2\pi}=2\int_{0}^{\infty}|f_\omega|^2\frac{d\omega}{2\pi}. \tag{49,8}$$

§ 50. Частично поляризованный свет

Всякая монохроматическая волна по самому своему определению непременно поляризована. Обычно, однако, приходится иметь дело с волнами лишь почти монохроматическими, содержащими частоты в некотором малом интервале $\Delta\omega$. Рассмотрим такую волну, и пусть ω есть некоторая средняя ее частота. Тогда ее поле (будем говорить, для определенности, об электрическом поле $\mathbf{E}$) в заданной точке пространства можно написать в виде

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0(t)\,e^{-i\omega t},$$

где комплексная амплитуда $\mathbf{E}_0(t)$ является некоторой медленно меняющейся функцией времени (у строго монохроматической